AN ELEMENTARY TREATISE

ON THE

THEORY OF EQUATIONS

WITH A COLLECTION OF EXAMPLES

BY

I. TODHUNTER, M. A., F. R. S.

TRANSLATED INTO URDU

BY

MUNSHI MAHAMMAD ZAKA-UL-LAH,
Head Master, Normal School, Delhi

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYGURH AND SUBA BEHAR

رسالہ مسائل معادلات

معہ بہت سي مثالوں کے

مؤلفہ

ٹاڈ هنٹر صاحب ام اي ايف آر ايس

جسکو

منشي محمد ذكاء الله صاحب هيڈ ماسٹر نارمل اسکول دهلي نے

بتائيد مقاصد

سين ٹيفک سوسئيٹي عليگڈه و سين ٹيفک سوسئيٹي صوبه بهار
اُردو ميں ترجمه کيا

اور

بمقام دهلي مطبع مرتضوي مين باهتمام
محمد عزيزالدين کے مطبوع هوا

سنه ۱۸۷۱ ع

ٹيٹل پيج مطبوعه انسٹيٹيوٹ عليگڈه

بسم اللہ الرحمن الرحیم

دیباچہ

اس رسالہ مین جملہ مسائل معادلات کی جو اکثر کتب اصولیہ مین ہوا کرتے ہین لکہی ہین اور اونکی ساتھہ بہت سی مثالین یعنی ورسٹی کی سوالات امتحان سی منتخب کرکے تحریر کی ہین

مسائل معادلات مین اکثر عجیب و غریب اور دلچسپ ایسی نتایج ہوتی ہین کہ اگر طالب علم ابتدائے تحصیل علوم ریاضیہ مین اون کو تحصیل کرلے تو بہت فایدی اوسکو حاصل ہوتی ہین اس رسالہ کو وہی طالب علم پڑہ سکتی ہین جو الجبرا سی خوب ماہر ہین اسمین کہین بڑی علم کی ضرورت سوای دفعات ۱۷۵ و ۲۴۷ و ۳۰۸ - ۳۱۴ کے نہین پڑتی ان دفعات کو طالب علم جب تک نہ مطالعہ کرین کہ وہ علم مثلث مین ضابطہ ڈی موئور سے واقف ہون یہہ کتاب حقیقت مین ایک ضمیمہ بڑی جبر مقابلہ کا ہی اسلئی اس کتاب مین حوالہ جا بجا جبر مقابلہ کی دفعات کا دیا گیا ہے

اس رسالہ مین ایسی تحقیقاتین بہت سی لکہی گئی ہین جنکا نام بہی کسی اور رسالہ مسائل معادلات مین نہین پایا جاتا مثلاً اونمین سی ایک کاچی کا ثبوت ہی کہ ہر مساوات کی ایک قیمت ہوتی ہی ہورنر کی ترکیب اور مسائل اسقاط اور ضابطہ کاچی صاحب کا خیالی قیمتون کی تعداد کی بیان مین اور ضابطہ ... کا عرض یہہ مضامین اور بعض اور اوسکی اسی کتاب مین اول اول لکہی گئی ہین ———

جناب ٹوڈہنٹر صاحب کی تصنیفات مین یہہ عجیب کتاب ہے فہرست مضامین یہہ ہے

مسایل لا

دیباچه

(۱) جبر مقابلہ کی بائیسوین باب مسائل مساوات مین طالب علم نی پڑہا ہوگا کہ مساوات $ا لا^2 + ب لا + ج = ۰$ کی دو قیمتین یعنی

$$\frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ۴ ا ج}}{۲ ا}$$

ہین اور ان قیمتون کی کیفیت یہہ ہی کہ اونکا مجموعہ برابر ہی $-\frac{ب}{ا}$ کی اور حاصل ضرب برابر ہی $\frac{ج}{ا}$ کی یعنی مجموعہ ان قیمتون کا برابر ہی مساوات $لا^2 + \frac{ب}{ا} لا + \frac{ج}{ا} = ۰$ کی دوسری رقم کی سر کی جسکی علامت بدلی ہوئی ہی اور اونکا حاصل ضرب برابر ہی اس مساوات کی اخر رقم کے پس اے طالب علم اس مضمون کو خوب غور سی خیال کر کی سمجہہ لی کہ اس رسالہ کی تمام مضامین اسی قسم کی ہین جبر مقابلہ مین تو مساوات درجہ دوم کی خواص بیان ہوئی یہان مساوات درجہ دوم سی اعلی درجہ کی مساواتون کے خواص اور مسائل بیان ہونگی گویا یہہ اوپر جو ہم نی لکہا ہی وہ ایک نمونہ ہی اوسپر قیاس کر کی طالب علم اس کتاب کے ساری مضامین کا تصور ذہن مین پیدا کر سکتا ہی ـــــ یہہ نتایج اور مسائل جو بیان ہونگی وہ اور فروع ریاضیہ مین کام ائینگے اور ان مسائل کی مشق طلبہ کی واسطی نہایت سودمند ہوگی جو طالب علم کہ علم جبر مقابلہ جانتی ہین اونکو اس قبیل کی مشق چندان مشکل اور دشوار ہی نہین یہہ ایک مضمون بوقلمون اونکی توجہ اور مطالعہ کی عادت بڑہانی کی واسطی ایک عجب چیز ہے

(۲) مساوات اور قیمت مساوات کے معنی طلبہ علم جبر مقابلہ مین خوب سمجہہ گئی ہونگی مگر ہم اونکی یہان تعریف یہہ لکہتی ہین جسسی مطلب خوب صاف اور عیان ہو جاے

جس جبریہ جملی مین لا مندرج ہو اوسکو جملہ لا کا کہتی ہین اور ج (لا) سی تعبیر کرتی ہین اور جو مقدار لا کی جگہہ ج (لا) مین رکہی جای اور وہ ج (لا) کو فنا اور نابود کر دی اوسکو قیمت مساوات

ج (لا) = ۰ کی کہتے ہین (اس ساری کتاب مین مساوات اور معادلہ کی ایک ہی معنی ہین مترجم)

ا لا^ن + ب لا^ن-۱ + س لا^ن-۲ + ۰ ۰ ۰ + ک لا + ل

کی صورت کا جو جملہ ہو اور اوسمین ن مثبت صحیح عدد ہو اور مثال ا د ب و س ۰ ۰ ک و ل مین لا دخل نہ رکہتا ہو تو اوسکو ن درجہ کا صحیح جملہ ناطق لا کا کہتے ہین اور اگر ہم کو یہہ دریافت کرنا ہو کہ وہ کونسی لا کی قیمت ہی کہ اس جملہ کو فنا کرتی ہی تو اوسکی یہہ معنی ہونگی کہ ہم ن درجہ کی صحیح ناطق مساوات کی قیمت دریافت کرتی ہین اس رسالہ مین ساری بحث اسی مساوات پر ہوگی اسی مساوات مین اگر ہم چاہین تو لا کی قوت اعلی کی مثال پر مساوات کو تقسیم کرکی سر اوس اعلی قوت کا ایک بنا لین تو مساوات کی یہہ صورت ہو جائیگی

لا^ن + ع۱ لا^ن-۱ + ع۲ لا^ن-۲ + ۰ ۰ ۰ + ع ن-۲ لا^۲ + ع ن-۱ لا + ع ن = ۰

اس مساوات کو سادہ صورت مساوات کہتی ہین اور اس سادگی کی کیفیت آگی کہل جائیگی جب لا^ن کا سر ایک ہوتا ہی تو خواص مساواتون کی بہت ٹہیک ٹہیک اور درست بیان ہوتی ہین اور جب یہہ سر نہین ہوتا تو مساواتون کی خواص بیان کرتی مین کچہہ دقت پڑتی ہی اگر ہم کو یہہ منظور نہ ہو کہ لا^ن کے مثال کو واحد بنائین تو اوسکو ع سی تعبیر کرین تو مساوات کی یہہ صورت ہو جائیگی

ع۰ لا^ن + ع۱ لا^ن-۱ + ع۲ لا^ن-۲ + ۰ ۰ ۰ + ع ن-۲ لا^۲ + ع ن-۱ لا + ع ن = ۰

(۳) یہہ ہمیشہ یاد رکہنی کی بات ہی کہ ہماری مساوات یا معادلہ سی مراد یہہ ہوتی ہی کہ صحیح ناطق مساوات ہے اور اگر وہ مساوات اس صورت کی نہ ہو تو تحویلات جبریہ سی اس صورت کی طرف تحویل ہو سکتی ہے مثلاً مساوات ا لا^۲ + ب لا + س √لا = ف تو یہہ مساوات مساوات منطق کی طرف اسطرح تحویل ہو سکتی ہی کہ س √لا اور ف کو منتقل کرکی مجذور کر لین تو مساوات منطق صحیح درجہ چہارم کی بنجائیگی جن مساواتون مین لوکارثمی جملی یا قوت نمای جملی یا علم مثلثی جملی یا اصم جملے مندرج ہون وہ ہمارے تحقیقات کی اندر بالتصریح داخل نہین ہونگین مثلاً اس قسم کی مساواتین کہ لا - جی لا = ۰ اور لا لوک لا - ا = ۰ داخل نہین ہو مگر ہماری تحقیقات مین ضمناً ایسی مساواتون

ہر کہ خارج از بحث ہین کچھہ نہ کچھہ اپنا تصرف دکھاوینگے

جہان کہین ہم جملہ ج (لا) لکھین تو اوسی ہماری ہمیشہ جملہ صحیحہ ناطقہ لا سی مراد ہوگی

بشرطیکہ اوسکے خلاف نہ بیان کیا گیا ہو

(۴) ایک بڑی بات امثال ع۰ و ع۱ و ع۲ و ۰۰ ع ن کی نسبت اس مساوات

$$ع_۰ لا^{ن} + ع_۱ لا^{ن-۱} + ع_۲ لا^{ن-۲} + \cdots + ع_{ن-۲} لا^۲ + ع_{ن-۱} لا + ع_ن = ۰$$

مین بیان ہوتی ہی مساوات درجہ دوم ا لا۲ + ب لا + ح = ۰ کو ہم حل کرسکتی ہین خواہ ا اور ب اور س کو جانین یا نہ جانین کہ وہ کونسی خاص اعداد ہین ہم فقط اتنی بات جاننی کی محتاج ہین کہ ا اور ب اور س ایسی ہین کہ وہ لا سی کچھہ لگاؤ نہین رکھتی مثلاً مساوات لا۲ - ۱۲ لا + ۱۵ = ۰ کی حل کرنی ہو تو خواہ ۱۵ کو مستقل رکنی مجذور کامل بنائین اور حسب دستور حل کرین یا دفعہ اول مین جو صورت عامہ لکھی ہوئی ہی اوسمین ا = ۱ اور ب = -۱۲ اور ح = ۱۵ کے لکھین

اگر ہم ایسی مساوات حل کرنی چاہین کہ اوسمین اول سی امثال کی واسطی عددی قیمتین نہ معین ہوئی ہون تو ایسی حل کو ہم حل جبریہ مساوات کا کہتی ہین اور اگر ہم حل جبریہ مساوات عامہ کا حاصل کرلین تو جس درجہ کی مساوات کا یہ حل ہوگا اوس درجہ کی مساوات کا حل عددی فقط اوس صورت عامہ کی امثال کی جگہ اعداد اوس حل جبریہ مین رکھنی سی حاصل ہوجائیگا جب آگے ہم پڑہینگے تو یہہ بات ہم کو معلوم ہوگی کہ حل جبریہ فقط چوتھی درجہ کی مساوات تک کا ہوسکتا ہے مگر تیسری درجہ اور چوتھی درجہ کی مساواتون کی امثال عددی جب اوس درجہ کی صورت مساوات عامہ کی حل جبریہ مین رکھتی ہین تو نتایج ایسی حاصل ہوتے ہین کہ وہ عملاً کسی کام کی نہین ہوتی اور چوتھی درجہ کی مساوات سی زیادہ درجہ کی مساواتون کا حل جبریہ ابتک نہین ہوا ہے اور نہ اینده اوسکی ہونی کی امید ہے

مگر وہ حل جسکو ہم حل حسابیہ معادلات کا کہتی ہین اور جسمین امثال عددی ہوتی ہین اوسمین زیادہ کارروائی کامیابی کی ساتہہ ہوسکتی ہی مثلاً پانچوین درجہ کی مساوات عامہ

کا حل جبریہ کسی طرح نہین ہو سکتا مگر حل حسابیہ مین حساب لگانی سی پانچوین درجہ کی مساوات کا جسمین امثال اعداد ہون حل حاصل ہو سکتا ہی اور یہہ تو ضرور ہی کہ قیمت تقریبی حاصل کر لین جیسی چاہین

(۵) اس جملہ $ع_0 لا^{ن} + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} + \dots + ع_{ن-2} لا^2 + ع_{ن-1} لا + ع_ن$ کو ج (لا) سی تعبیر کرین اور اس جملہ کی قیمت جو لا کی جگہ ا رکہنی سی ہو اوسکو ج (ا) سی تعبیر کرین تو ہم یہہ تبلائینگے کہ ج (ا) کی عددی قیمت کا حساب ج (لا) کی امثال اور خود ا کو خاص اعداد کے فرض کرنے سے بہت آسانی سی ہو جاتا ہے

مثلاً تیسرے درجہ کا جملہ لو تو ہم عددی قیمت

$$ع_0 ا^3 + ع_1 ا^2 + ع_2 ا + ع_3$$

کی دریافت کرنی چاہتے ہین

اول یہہ حاصل ہوتا ہے کہ $ع_0 ا$

$ع_1$ کو جمع کرو تو یہہ حاصل ہوگا $ع_0 ا + ع_1$

ا مین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا $ع_0 ا^2 + ع_1 ا$

$ع_2$ کو زیادہ کرو تو یہہ حاصل ہوگا $ع_0 ا^2 + ع_1 ا + ع_2$

ا مین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ $ع_0 ا^3 + ع_1 ا^2 + ع_2 ا$

$ع_3$ زیادہ کرو تو یہہ حاصل ہوگا $ع_0 ا^3 + ع_1 ا^2 + ع_2 ا + ع_3$

اس عمل کو اس ترتیب سے لکہو کہ

$ع_0$	$ع_1$	$ع_2$	$ع_3$
	$ع_0 ا$	$ع_0 ا^2 + ع_1 ا$	$ع_0 ا^3 + ع_1 ا^2 + ع_2 ا$
	$ع_0 ا + ع_1$	$ع_0 ا^2 + ع_1 ا + ع_2$	$ع_0 ا^3 + ع_1 ا^2 + ع_2 ا + ع_3$

ج (لا) کتنی ایک درجہ کا ہو اوسپر اسی عمل کو مرعی رکہو مثلاً عددی قیمت $3لا^4 - 2لا^3 - 5لا + 7$ کی جب $لا = 3$ ہو دریافت کرنی ہو

+۷	-۵	۰	-۲	۳
+۱۷۴	+۶۳	۲۱	+۹	
+۱۸۱	+۵۸	+۲۱	+۷	۳

پس حاصل ۱۸۱ ہوا

(۶) اگر لا = ۱ کسی جملہ صحیحہ ناطقہ کو فنا کری تو وہ جملہ پورا لا − ۱ پر تقسیم ہوگا

فرض کرو کہ ج (لا) اوس جملہ کو تعبیر کری اور ہم کو یہہ معلوم ہی کہ ج (لا) = ۰ تو ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ ج (لا) لا − ۱ پر پورا تقسیم ہوگا

ج (لا) کو لا − ۱ پر موافق قاعدہ مروج جبریہ کی تقسیم کیٔ جائے جب تک کہ باقی مین لا نہ رہی اور فرض کرو کہ ق خارج قسمت ہی اور اگر کوئی باقی رہتی ہی تو وہ ر ہی تو

ج (لا) = ق (لا − ۱) + ر اس متطابقہ مین لا کی جگہ ۱ رکھو تو اس سبب سے کہ ق جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہی تو وہ لا = ۱ کی رکھنی سی لانہایت نہین ہو سکتا اسواسطی جب لا = ۱ کی ہو تو ق (لا − ۱) فنا ہو جائیگا اور بموجب فرض کی لا = ۱ کے ہونی سی ج (لا) بہی فنا ہوتا ہے اسلئے جب لا = ۱ کے ہو تو ر بہی فنا ہوتا ہی اور چونکہ ر مین لا نہین ہی تو جب وہ لا = ۱ کے ہونی سی فنا ہوتا ہی تو وہ ہمیشہ فنا ہوگا یعنی ر = ۰ اور لا − ۱ تقسیم ج (لا) کو پورا کرتا ہے

(۷) جس مسئلہ کا ثبوت اوپر لکھا ہی وہ ثبوت ایک عظمت رکھتا ہی اور سہجہ کو بڑہاتا ہی مگر اوسکے ثبوت کو ایک اور طرح لکھتی ہین اوسمین خارج قسمت ق کی ایسی صورت ظاہر ہوتی ہی کہ اوسی اور زیادہ فائدہ ہوتا ہی فرض کرو کہ

ج (لا) = ع. لا^{ن} + ع$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ع$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + ... + ع$_{ن-۲}$ لا^{۲} + ع$_{ن-۱}$ لا + ع$_{ن}$

چونکہ ج (۱) = ۰ تو ج (لا) = ج (لا) − ج (۱)

= ع. (لا^{ن} − ۱^{ن}) + ع$_{۱}$ (لا$^{ن-۱}$ − ۱$^{ن-۱}$) + ع$_{۲}$ (لا$^{ن-۲}$ − ۱$^{ن-۲}$) + ... + ع$_{ن-۱}$ (لا − ۱)

اب جبر مقابلہ کی دفعہ ۴۸۳ کی موافق لا^{ن} − ۱^{ن} اور لا$^{ن-۱}$ − ۱$^{ن-۱}$ ... مین سے ہر یک لا − ۱ پر پوری تقسیم ہوتی ہی اب اس تقسیم کے کرنے سی ہم کو خارج قسمت یہہ حاصل ہوگا کہ

ع. (لا$^{ن-۱}$ + ا لا$^{ن-۲}$ + ا^{۲} لا$^{ن-۳}$ + ... + ا$^{ن-۲}$ لا + ا$^{ن-۱}$)

+ ع$_{۱}$ (لا$^{ن-۲}$ + ا لا$^{ن-۳}$ + ا^{۲} لا$^{ن-۴}$ + ... + ا$^{ن-۲}$)

+ . . . .

+ ع$_{ن-۲}$ (لا + ا)

+ ع$_{ن-۱}$

اب اس خارج قسمت کو اس ترتیب سے لکھتے ہیں کہ

ع. لا$^{ن-۱}$ + (ع. ا + ع$_{۱}$) لا$^{ن-۲}$ + (ع. ا^{۲} + ع$_{۱}$ ا + ع$_{۲}$) لا$^{ن-۳}$ + . . .

+ ع. ا$^{ن-۱}$ + ع$_{۱}$ ا$^{ن-۲}$ + ... + ع$_{ن-۱}$

اور اسکو ہم

ق. لا$^{ن-۱}$ + ق$_{۱}$ لا$^{ن-۲}$ + ق$_{۲}$ لا$^{ن-۳}$ + ... + ق$_{ن-۲}$ لا + ق$_{ن-۱}$

سے تعبیر کرتے ہیں

اسواسطے یہہ امثال جدید امثال قدیم سے ان صورتون میں اسطرح مربوط ہوتے ہیں

ق. = ع. اور ق$_{۱}$ = ا ق. + ع$_{۱}$ اور ق$_{۲}$ = ا ق$_{۱}$ + ع$_{۲}$

اور ق$_{۳}$ = ا ق$_{۲}$ + ع$_{۳}$ . . . .

یعنی ہر یک امثال جدید اسطرح حاصل ہوتا ہے کہ ہر یک امثال جدید کو اوسکے ماقبل کے امثال جدید میں ضرب دو اور ماحصل پر متناظرہ امثال قدیم زیادہ کرو اور یہہ بھی خیال کرنا چاہیے کہ ہر یک امثال جدید دفعہ ۵ کے عمل سے حاصل ہوتا ہے

(۸) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور اوسکو لا - ا تقسیم کرنا ہو تو ا قیمت مساوات ج (لا) = ۰ کے ہوگی

دلیل فرض کرو کہ ج (لا) کو جب لا - ا پر تقسیم کریں تو خارج قسمت ق نکلتا ہے تو ج (لا) = ق (لا - ا)

اگر اس مساوات میں لا کی جگہ ا رکھیں تو ق کی لا انتہا نہ ہونے کی سبب سے ق (ا - ا)

فنا ہوتا ہی پس جب لا = ا کے ہو تو ح (لا) فنا ہوتا ہی اسواسطی ا قیمت مساوات ح (لا) = ۰ کی ہے

(۹) جب کوی جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا لا - س پر تقسیم کیا جاے اور س ایک مقدار مستقل ہو تو باقی کو دریافت کرو

فرض کرو کہ ح (لا) جملہ صحیحہ ناطقہ لا کو تعبیر کرتا ہی اور ح (لا) کو لا - س پر تقسیم کرو جب تک کہ باقی کو کچھہ لگاؤ لا سی نہ رہی اور ق خارج قسمت نکلی اور ر باقی رہی تو

ح (لا) = ق (لا - س) + ر

اس مطابقہ میں س کی جگہ لا رکھو تو ق لا نہایت نہ ہوگا اور اسیواسطے ق (لا - س) فنا ہوگا اور ح (س) = ۰ یعنی جب لا = س کی ہو تو ر برابر ح (س) کے ہوگا اور ر میں لا کے نہ شامل ہوتی ہی ہمیشہ ر برابر ح (س) کے ہوگا

مثلاً اگر ۳ لا^{۴} - ۲ لا^{۳} - ۵ لا + ۷ کو لا - ۳ پر تقسیم کریں تو خارج قسمت ۳ لا^{۳} + ۷ لا^{۲} + ۲۱ لا + ۵۸ ہوگا اور باقی ۱۸۱ رہینگی دفعات ۵ اور ۷ کو دیکھو

(۱۰) فرض کرو کہ ح (لا) جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہی اور لا کی جگہہ لا + ی رکھو اور ح (لا + ی) کو موافق قواء ی کے لکھو اور مختلف قوا کے امثال دریافت کرو

فرض کرو کہ ح (لا) = ع. لا^{ن} + ع$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ع$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + ... + ع$_{ن-۱}$ لا + ع$_{ن}$ تو

ح (لا + ی) = ع. (لا + ی)^{ن} + ع$_{۱}$ (لا + ی)$^{ن-۱}$ + ع$_{۲}$ (لا + ی)$^{ن-۲}$ + . . . + ع$_{ن-۱}$ (لا + ی) + ع$_{ن}$

(لا + ی)^{ن} اور (لا + ی)$^{ن-۱}$ . . . کو بموجب ضابطہ جملہ ثنائی کی پہیلاؤ اور کل ماحصل کو موافق قواء ی کے لکھو تو ح (لا + ی) کے واسطی یہہ سلسلہ حاصل ہوگا کہ

ع. لا^{ن} + ع$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ع$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + . . . + ع$_{ن-۱}$ لا + ع$_{ن}$

+ ی { ن ع. لا$^{ن-۱}$ + (ن - ۱) ع$_{۱}$ لا$^{ن-۲}$ + (ن - ۲) ع$_{۲}$ لا$^{ن-۳}$ + . . . ع$_{ن-۱}$ }

+ $\frac{\text{ی}^{۲}}{۱ \times ۲}$ { ن (ن - ۱) ع. لا$^{ن-۲}$ + (ن - ۱) (ن - ۲) ع$_{۱}$ لا$^{ن-۳}$ + . . . + ۲ ع$_{ن-۲}$ }

\+ . . . . .

\+ ی^ر / ا^ر [ن(ن−۱) . . . (ن−ر+۱) ع٠ لا^(ن−ر) + (ن−۱)(ن−۲) (: (ن−ر) ع۱ لا^(ن−ر−۱) + . . .]

\+ . . .

\+ ی^ن / ا^ن [ا^ن ع]

اول سطر اس جملہ کی تو ج (لا) ہی اور ی کی امثال کو ہم جَ (لا) سے اور امثال ی^۲/۱×۲ کو جً (لا) سی اور امثال ی^۳/ا^۳ کو جٌ (لا) سی اور علی ہذا القیاس تعبیر کرو یہہ طریقہ کتابت خالی از دقت اوسوقت نہوگا کہ بہت سی زبرین لگانی پڑینگے پس عموماً ہم ی^ر/ا^ر کی امثال کو ح^ر (لا) سے تعبیر کرتے ہین اسی معلوم ہوا کہ

ح (لا+ی) = ح لا + ی جَ (لا) + ی^۲/۱×۲ حً (لا) + ی^۳/ا^۳ حٌ (لا) + ر . . .
. . . + ی^ر/ا^ر ج^ر (لا) + . . . + ی^ن/ا^ن ح^ن (لا)

دیکھنے سی معلوم ہوتا ہی کہ ج (لا) و جَ (لا) و جً (لا) و حٌ (لا) . . . ح^ن (لا) اس قاعدہ عامہ کی موافق تمام مربوط ہوتی ہین کہ ج^(ر+۱) (لا) کے حاصل کرنی کی واسطی ہم ہریک رقم ج^ر (لا) کو لا کے قوت نماین جو اوس رقم مین ہو ضرب دیتی ہین اور اوس قوت نما مین سی ایک گھٹا کر قوت نما بناتے ہین

(۱۱) فرض کرو کہ ج (لا) چوتھی درجہ کا ہے اور

ج (لا) = ع٠ لا^۴ + ع۱ لا^۳ + ع۲ لا^۲ + ع۳ لا + ع۴

تو جَ (لا) = ۴ ع٠ لا^۳ + ۳ ع۱ لا^۲ + ۲ ع۲ لا + ع۳

جً (لا) = ۴ × ۳ ع٠ لا^۲ + ۳ × ۲ ع۱ لا + ۲ ع۲

جٌ (لا) = ۴ × ۳ × ۲ ع٠ لا + ۳ × ۲ ع۱

ج'''' (لا) = ۴ × ۳ × ۲ ع٠

ج (لا+ی) = ج (لا) + ی جَ (لا) + ی^۲/۱×۲ جً (لا) + ی^۳/ا^۳ جٌ (لا) + ی^۴/ا^۴ ج'''' (لا)

اگر ہم ع. و ع۱ و ع۲ و ع۳ و ع۴ اور لا کی واعلادے قیمتین مقرر کرین تو ج (لا) اور جَ (لا) ۰ ۰ ۰ کا حساب دفعہ ۵ کی ترکیب کے موافق ہو سکتا ہی جسبا ہم ہورنر صاحب کی ترکیب مساواتون کی حل کرنی کی بیان کرینگے تو اوسمین بتلاوینگے کہ یہہ حساب کسطرح اسانی سی نہایت ضبط کی ساتہہ ہو سکتی ہین

(۱۲) اگر ہم سلسلہ ج (لا+ی) کا اغازی کی اعلی قوت سی کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ج (لا+ی) = ع. یٰن + (ع۱ + ن ع. لا) یٰن⁻¹ + [ع۲ + (ن-۱) ع۱ لا + ن(ن-۱)/(۲×۱) ع. لا۲] یٰن⁻۲

+ [ع۳ + (ن-۲) ع۲ لا + (ن-۱)(ن-۲)/(۲×۱) ع۱ لا۲ + ن(ن-۱)(ن-۲)/ل۳ ع. لا۳] یٰن⁻۳

+ [ع ر + (ن-ر+۱) ع ر-۱ لا + ن(ن-۱) ۰ ۰ ۰ (ن-ر+۱)/لر ع. لار] یٰن⁻ر

+ ۰ ۰ + ج (لا)

جو صورت ہم نی ج (لا+ی) کی اوپر بہی لکہی ہی اوسی یہہ صورت مستنبط ہو سکتی ہی یا ج (لا+ی) کے ہر رقم کو پہیلا کر لکہین اور ی کی قواء متنازلہ کی ترتیب سی لکہین تو یہی مطلب حاصل ہو جایگا

(۱۳) جملہ جَ (لا) کو ج (لا) کا اول جملہ مشتقہ اور جً (لا) کو دوم جملہ مشتقہ علی ہذا القیاس کہتی ہین جب طالب علم اصول علم مفصولات سی واقف ہوگا تو اوسکو معلوم ہوگا کہ ہر جملہ مشتقہ اپنی ماقبل کی جملہ کا سر مفصول لحاظ لا کی ہوتا ہی اور ج (لا+ی) کے واسطی جو جملہ قواء ی مین لکہا ہی وہ ایک مثال ٹیلر صاحب کے ضابطہ کی ہے

علاوہ برین یہہ امر بہی ملحوظ خاطر رہی کہ جً (لا) جسطرح جَ (لا) سی استخراج ہوتا ہے اوسیطرح جَ (لا) کا ج (لا) سی مستنبط ہوتا ہی پس جً (لا) اول جملہ مشتقہ جَ (لا) کا اور دوم جملہ مشتقہ جَ (لا) کاہی اور علی ہذا القیاس اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ گذشتہ کی

جَ (لا+ی) = جَ (لا) + ی جً (لا) + ی۲/(۲×۱) جً (لا) + ی۳/ل۳ جََ (لا) + ۰ ۰

+ ۰ ۰ ی ر⁻¹/ل ر-۱ ج ر (لا) ۰ ۰ + ی ن⁻¹/ل ن-۱ ج ن (لا)

اور علی ہذا القیاس

جً (لا+ی) = جً (لا) + ی جً (لا) + ی۲/(۲×۱) ج (لا) + ۰ ۰ ۰ ۰ ۰

$\ldots \frac{ن-ر}{ر} ج (لا) + \ldots + \frac{ن-۲}{ن-۲} ج^{ن} (لا)$

اور علی ہذا القیاس

(۱۴) لا کی کسی جملۂ صحیحہ ناطقہ مین جو موافق قوا ر متنازلہ لا کی لکہا جاے ہر یک رقم کو جو اوسمین واقع ہوتی ہو لا کو کافی بڑہا کر ایسا بنا سکتی ہین کہ وہ اپنی سب ما بعد کی رقمون کی مجموعہ سی جتنی گنی ہم چاہین بڑی ہو جای اور ہر یک رقم کو لا کو کافی گہٹا کر ایسا بنا سکتی ہین کہ وہ اپنی سب ما قبل کی رقمون کی مجموعہ سی جتنی گنی ہم چاہین ہو جاے

فرض کرو $ع_{.} لا^{ن} + ع_{۱} لا^{ن-۱} + ع_{۲} لا^{ن-۲} + \ldots + ع_{ن-۲} لا^{۲} + ع_{ن-۱} لا + ع_{ن}$

ایک جملۂ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور فرض کرو کہ روین رقم $ع_{ر-۱} لا^{ن-ر+۱}$ واقع ہوتی ہے

یعنی $ع_{ر-۱}$ صفر نہین ہی اور امثال $ع_{ر}$، $ع_{ر+۱}$ ... $ع_{ن}$ مین جو سب سے بڑا ہے

اوسکی عددی قیمت ق ہے روین رقم کی مابعد رقمون کا مجموعہ

$ق (لا^{ن-ر} + لا^{ن-ر-۱} + \ldots + لا + ۱)$ یعنی $ق \frac{لا^{ن-ر+۱} - ۱}{لا - ۱}$ سے زیادہ نہین ہو سکتا

اور روین رقم کی نسبت اس مجموعہ کی ساتہہ $\frac{ع_{ر-۱} (لا-۱) لا^{ن-ر+۱}}{ق (لا^{ن-ر+۱} - ۱)}$

یعنی $\frac{ع_{ر-۱} (لا-۱)}{ق - \frac{ق}{لا^{ن-ر+۱}}}$ اب لا کو کافی بڑا فرض کرتی سی شمار کنندہ کو جتنا چاہین ہم بڑا کر سکتے ہین اور نسب نما کو برابر ق کی کر سکتی ہین اسلئی اس نسبت کو جتنا چاہین بڑہا لین

پس اسی دعوی کا پہلا جزو ثابت ہوا — اب دوسرے جزو کے ثابت کرنے کے لئے فرض کرو

کہ $لا = \frac{۱}{ی}$ تو یہہ سلسلہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{۱}{ی^{ن}} \left[ع_{.} + ع_{۱} ی + ع_{۲} ی^{۲} + \ldots + ع_{ن-۱} ی^{ن-۱} + ع_{ن} ی^{ن} \right]$$

اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ لا کو کافی چہوٹا فرض کرکی یعنی ی کو کافی بڑا فرض کرکی کسی رقم $ع_{ر} ی^{ر}$ کو جو نفس الامر مین واقع ہوتی ہو نسبت مین اپنی سارے ارقام ماقبل کے $ع_{.} + ع_{۱} ی + \ldots ع_{ر-۱} ی^{ر-۱}$ کی مجموعہ کی ساتہہ جتنا چاہین بڑہا دین اور یہہ اول ثابت ہو چکا ہی اسی دوسرا دعوی کا جزو ثابت ہوا

(۱۵) مسائل معادلات مین جو اول سوال ذہن مین آتا ہی وہ یہہ ہی کہ ہر مساوات ایک قیمت رکہتی یا نہین

اب ہم بعض سیدہی سادہی مقدمات لکہینگے جسی یہہ ثابت ہوگا کہ خاص صورتون مین ایک قیمت کا وجود ہوتا ہی ایک مسئلہ کی ضرورت پڑتی ہی جسکو بدیہی جانکر تسلیم کرلیا کرتی ہین مگر ہم اوسکو دفعہ ذیل مین ثابت کرتے ہین

(۱۶) فرض کرو کہ ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ جملہ لا کا ہو اور اوسکی قیمتین ج (ا) اور ج (ب) موافق لا کی ا اور ب کی قیمتون کی ہون یعنی ج (لا) مین جب لا کی جگہ ا لکہین تو ج (لا) کی قیمت ج (ا) حاصل ہوا اور علی ہذا القیاس ج (ب) تو لا جب ا سی بدل کر ب بنی گا تو ج (لا) ج (ا) سی بدل کر ج (ب) بنی گا اور ج (ا) اور ج (ب) کی سب درمیانی قیمتون پر اوسکی نوبت پہونچیگی اب فرض کرو کہ لا کی قیمت س لگائی جائی اور اسکی موافق ج (لا) کی قیمت ج (س) ہو اب لا کی واسطے ایک اور قیمت س + صہ مقرر کرو تو صہ کو کافی چہوٹا فرض کرنی سی ہم ج (س + صہ) اور ج (س) کے تفاوت کو جتنا چاہین کم کرسکتی ہین اسواسطے کہ

$$\text{ج}(\text{س}+\text{صہ}) = \text{ج}(\text{س}) + \text{صہ}\,\text{جَ}(\text{س}) + \frac{\text{صہ}^{2}}{1\times2}\,\text{جً}(\text{س}) + \cdots + \frac{\text{صہ}^{\text{ن}-1}}{|\text{ن}-1}\,\text{ج}^{\text{ن}-1}(\text{س}) + \frac{\text{صہ}^{\text{ن}}}{|\text{ن}}\,\text{ج}(\text{س})$$

اب پہر بموجب دفعہ ۱۴ کی صہ کو کافی چہوٹا فرض کرکے اول رقم سلسلہ صہ جَ (س) اور $\frac{\text{صہ}^{2}}{1\times2}$ جً (س) اور $\frac{\text{صہ}^{3}}{|3}$ جً (س) . . . . کو جو معدوم نہین ہوتی ایسا بنا سکتی ہین کہ وہ اپنی کل مابعد کی رقمون کے مجموعہ سی جتنی گنی ہم چاہین ہوجاے اور صہ کو کافی چہوٹا فرض کرنی سی یہہ رقم خود جتنی چہوٹی ہم چاہین بن سکتی ہی اسواسطی ج (س + صہ) — ج (س) کو جتنا چاہین صہ کو چہوٹا فرض کرکی بنا سکتی ہین اسی ثابت ہوتا ہی کہ لا جسطرح بتدریج بدلتا ہی اوسیطرح ج (لا) بتدریج بدلتا ہے اگر ج (لا) کی کوئی قیمت موافق قیمت مشخصہ لا کی ہو تو اوسکی دوسری قیمت پہلی قیمت کی قریب جتنی ہم چاہین موافق لا کی دوسری قیمت کی جو پہلی قیمت مشخصہ کے کافی قریب ہونی سکتی ہین اسی معلوم ہوا کہ جب لا اسی ب تک بدلتا ہی تو جملہ ج (لا) قیمت ج (ا) سی قیمت ج (ب) تک نوبت بہ نوبت بدلتا ہی اور اوسکی اندر کہین گسستگی نہین واقع ہوتی اسواسطی کہ اگر یہہ کہا جاے کہ اوسکی اندر گسستگی واقع ہوتی ہے تو اسکی یہہ معنی ہین کہ ہم لا کی ایسی قیمت نہین مقرر کرسکتی کہ وہ پہلی قیمت کی قریب ہماری مرضی کی موافق ہو

(۱۷) دفعہ گذشتہ میں ہم نے یہہ تو نہیں بیان کیا کہ ج (لا) ہمیشہ ج (ا) سے ج (ب) تک بڑہتا ہے یا ہمیشہ ج (ا) سے ج (ب) تک گہٹتا ہے اسلئے مختلف صورتیں ہونگی کبھی زیادہ ہوگا کبھی کم ہوگا لیکن یہہ ہم نے بیان کیا ہے کہ وہ نوبت بہ نوبت بتدریج قیمت ج (ا) سے قیمت ج (ب) تک تبدیل ہوتا ہے اور یہہ تبدل یکایک نہیں ہوتا بلکہ نوبت بہ نوبت ہوتا ہے یہہ ایک بڑا مقدمہ ہے اور اگر طالب علم اوسپر غور کریگا تو اوسکو بدیہات سے معلوم ہوگا کیونکہ یہہ بات ظاہر ہے کہ لا کی ہر جتنا ہی قیمت کی موافق ج (لا) کی بہی جتنا ہی قیمت ہوگی اور یہہ ہم نے ثابت کردیا کہ اگر لا مے نہایت چہوٹی تبدیلی کیجائے تو ج (لا) میں بہی نہایت چہوٹی تبدیلی ہوگی پس اس سبب سے ج (لا) کے متواتر قیمتوں میں جو درجہ بدرجہ ہوتی ہیں کہیں گسستگی اور شکستگی نہیں واقع ہوگی

(۱۸) طالب علم اگر ہندسہ بالجبر سے واقف ہوگا تو اوسکو یہہ مضمون اوپر کا بڑا دلچسپ معلوم ہوگا وہ خطوط منحنی جو جملوں کو تعبیر کریں بنا یگا اور اون پر غور اسطرح کریگا کہ ج (لا) کو وہ سے تعبیر کریگا پس ی = ج (لا) کو مساوات خط منحنی کی خیال کریگا اور پہر اس خط منحنی کے اوس حصہ کو جو درمیان لا = ا اور لا = ب کی واقع ہے فرض کریگا پہر اسی اوس کی ذہن میں یہہ عمدہ تصور پیدا ہوگا کہ ج (لا) کی واسطی جو قیمتیں مابین ج (ا) اور ج (ب) کی درمیان تشخیص کیجائیں اونمیں ضرور ہے کہ تواتر ہو اور کہیں اونمیں گسستگی نہ واقع ہو

اس بات پر بہی لحاظ رہے کہ ا اور ب اور ج (ا) اور ج (ب) کی ساتھہ مثبت ہونے کی قید نہیں ہے، ج (ا) اور ج (ب) کی مابینی قیمتوں کی معنی علم جبر مقابلہ کی موافق لئے گئے ہیں یعنی ہر مقدار کو ج (ا) اور ج (ب) کی مقدار مابینی کہینگے اگر ی - ج (ا) اور ج (ب) - ی کے ایک سے علامت ہو

(۱۹) اگر لا کی جملہ صحیحہ ناطقہ ج (لا) میں لا کی جگہ دو عدد رکہی جائیں اور اونسے قیمتیں ج (ا) کی مختلف العلامت حاصل ہوں تو ضرور ہے کہ کم از کم ایک قیمت مساوات ج (لا) = ۰ کی لا کی اون قیمتوں کی درمیان واقع ہو

فرض کرو کہ ا اور ب وہ قیمتیں ہیں تو ج (ا) اور ج (ب) مختلف العلامت بموجب فرض کے ہیں

اور بموجب دفعہ ۱۲ کی جب لا بتدریج وسی با تک بدلتا ہی تو جملہ ج (لا) بغیر کسی گسستگی قیمت کی ج (ا) سی ج (ب) تک بدلتا ہی لیکن اس سبب سے کہ ج (ا) اور ج (ب) مختلف العلامت ہین تو قیمت صفر کی اونکی درمیان واقع ہوگی اسلئے ضرور ہی کہ موافق کسی قیمت کی جو ا اور ب کے درمیان واقع ہو ج (لا) برابر صفر کی ہو اور اسکی یہی معنی ہین کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک قیمت درمیان ا اور ب کے واقع ہوتی ہے

(۲۰) مساوات طاق درجہ کی ضرور ایک اصلی قیمت رکھتی ہے

فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ سے تعبیر ہو یہان

ج (لا) = ع۰ لا^ن + ع۱ لا^(ن-۱) + ۰۰۰ + ع ن-۱ لا + ع ن

اسمین ن ایک طاق عدد ہی

جب لا کافی بڑا ہو تو بموجب دفعہ ۱۴ کی اول رقم ج (لا) کی یعنی ع۰ لا^ن باقی ارقام کی مجموعہ سی بڑا ہوگا اسواسطے ج (لا) کی علامت وہی ہوگی جو ع۰ لا^ن کی علامت ہی پس لا کو کافی بڑا مقرر کرنے سے اگر لا مثبت ہو تو ج (لا) کی وہی علامت ہوگی جو ع۰ کی علامت ہی اور اگر لا منفی ہوگا تو ج (لا) کی علامت مخالف ع۰ کی علامت کی ہوگی پس اس سبب سے کہ لا کی ایک مناسب مثبت قیمت جب بدل کر ایک مناسب منفی قیمت ہو جاتی ہی تو علامت ج (لا) کی بدلتی ہی ضرور ہی کہ ایک قیمت درمیانی لا کی ایسی ہو کہ ج (لا) کو معدوم کردی اسکی یہہ معنی ہین کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک اصلی قیمت ہے

اب ہم یہہ دریافت کرسکتی ہین کہ یہہ قیمت مثبت ہوگی یا منفی اسواسطی کہ جب لا کی واسطی صفر رکھین تو ج (لا) کی علامت وہی ہوگی جو ع ن کی علامت ہی پس اگر ع۰ اور ع ن کی ایک ہی علامت ہو تو ع ن/ع۰ مثبت ہی تو مساوات ج (لا) = ۰ کی یقینی ایک منفی قیمت ہوگی اور اگر ع۰ اور ع ن کی مختلف علامتین ہوں تو ع ن/ع۰ ایک مقدار منفی ہوگی اسواسطی یقینی ایک مثبت قیمت مساوات ج (لا) = ۰ کی ہوگی پس اگر مساوات طاق درجہ کی ہو اور سب سے لا کی اعلی قوت کی امثال ہو یہ مساوات کو تقسیم کر کی سادی صورت اوسکی بنائین تو ایک اصلی قیمت مساوات ہوگی جسکی

علامت متضاد آخر رقم کے علامت کے ہوگی

(۲۱) ایک مساوات زوج درجہ کی ہو اور صورت سادہ رکھتی ہو اور اوسکی آخر رقم منفی ہو تو اوسکی دو اصلی قیمتین مختلف العلامت ضرور ہونگین

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات ہو تو جب لا صفر ہوگا تو بموجب فرض کے ج (لا) منفی ہوگا جب لا کافی بڑا ہو تو ج (لا) مثبت ہوگا خواہ لا مثبت ہو یا منفی پس کوئی منفی قیمت لا کی ایسی ہی کہ ج (لا) کو معدوم کرتی ہی اور نیز کوئی مثبت قیمت بھی ایسی ہے کہ ج (لا) کو معدوم کرتی ہی یعنی مساوات ج (لا) = ۰ کی یقینی ایک مثبت قیمت اور ایک منفی قیمت ہی

(۲۲) اگر جملہ صحیحہ ناطقہ ج (لا) مین ارقام کی ایک صنف کی امثال کی یکسان علامت ہو اور اونکی اگلے ارقام کی صنف کی امثال کی علامت پہلی علامت کی متضاد ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک مثبت قیمت ہو گی اور صرف ایک ہی مثبت قیمت ہو گی

بموجب دفعات ۲۰ اور ۲۱ کی مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک مثبت قیمت ہوگی اب یہہ ثابت کرینگے کہ صرف ایک ہی مثبت قیمت ہوگی

فرض کرو کہ ج (لا) = ع. لا^ن + ع۱ لا^ن-۱ + ع۲ لا^ن-۲ + ۰۰۰ + ع ن-۱ لا + ع ن

فرض کرو کہ امثال ع. اور ع۱ ۰۰۰ ع ر سب کے مثبت ہین اور باقی امثال منفی ہین

فرض کرو کہ ع ر+۱ = − عَ ر+۱ اور ع ر+۲ = − عَ ر+۲ ۰۰۰ ع ن = − عَ ن

پس ج (لا) کو ہم اسطرح لکھہ سکتے ہین کہ

ج (لا) = لا^ن-ر [ع. لا^ر + ع۱ لا^ر-۱ + ع۲ لا^ر-۲ + ۰۰۰ + ع ر − عَ ر+۱ / لا − عَ ر+۲ / لا^۲ − ۰۰۰ − عَ ن / لا^ن-ر]

جملہ ع. لا^ر + ع۱ لا^ر-۱ + ع۲ لا^ر-۲ + ۰۰۰ ع ر ایسا ہی بڑہتا ہے جیسا کہ لا بڑہتا ہے مگر جس حالت مین کہ ر = ۰ کے تو اوس کی قیمت مستقل ہو جاتی ہے اور جملہ

عَ ر+۱ / لا + عَ ر+۲ / لا^۲ + ۰۰۰ + عَ ن / لا^ن-ر ایسا گھٹتا ہے جیسا کہ لا بڑہتا ہے

پس جب لا صفر سے اوپر بڑہتا ہی تو دونو جملہ سوا ایک دفعہ کی آپس میں برابر نہین ہو سکتی اسکی یہی معنی ہین کہ

ج (لا) = ۰ کے صرف ایک ہی مثبت قیمت ہے

(۲۳) کسی طرح مشابہ نہ لگی اسلیئے ہم اخر تین دفعات کے نتایج کو نہایت صفائی اور درستی کے ساتھ لکھتے ہیں

دفعہ ۲۰ میں جس مساوات کا ذکر ہی اوسکی واسطی یہہ ثابت ہوا ہی کہ اوسکی کم از کم ایک اصلی قیمت ہوتی ہے مگر یہہ نہیں ثابت ہوا کہ وہ صرف ایک ہی ہوتی ہی دفعہ ۲۱ میں جس مساوات کا بیان ہوا ہی اسکے واسطی یہہ ثابت ہوا ہی کہ اوسکی کم از کم دو اصلی قیمتیں ہونگیں مگر یہہ نہیں ثابت کیا کہ صرف دو ہی اصلی قیمتیں ہونگیں دفعہ ۲۲ میں جس مساوات کا ذکر ہی اوسمیں ثابت ہوا ہی کہ ایک مثبت قیمت اوسکی ہوتی ہی اور یہہ بھی ثابت ہوا ہی کہ صرف ایک ہی قیمت ہوتی ہی مگر یہہ نہیں ثابت ہوا کہ کوئی اوسکی منفی قیمت نہیں ہوتی

(۲۴) دفعات ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ میں جو مقدمات ثابت ہوئی ہیں اونمیں خاص صورتوں کے اندر قیمتوں کا وجود موقوف اس امر پر رکہا گیا ہی کہ ہم اس بات کو ثابت کریں کہ ج (لا) کی ایک دفعہ علامت یا کئی دفعہ علامت بدلتی ہی اگر برخلاف اسکے ایسی صورت ہو کہ خاص سلک قیمتوں کی ایسی ہو کہ ہم یہہ ثابت کر دیں کہ ج (لا) کی علامت موافق اوس سلک کے نہیں تبدیل ہوتی تو کوئی قیمت مساوات ج (لا) = ۰ ہیں اوس سلک میں سے لا کی واسطی نہ ہوگی

اب اس دعوی کی ظاہر صورتیں ذیل میں لکھی ہیں

(۱) اگر امثال ج (لا) کی سب مثبت ہوں تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کوئی مثبت قیمت نہوگی

(۲) اگر ج (لا) میں لا کی زوج قوا کی امثال یکساں علامت رکہیں اور لا کی طاق قوتوں کی سب امثال پہلی علامت کی متضاد علامت رکہیں تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کوئی منفی قیمت نہ ہوگی

(۳) اگر لا کی صرف زوج قوا سی ج (لا) مشتق ہو اور تمام امثال کی یکساں علامت ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کوئی اصلی قیمت نہیں ہوگی

(۴) اگر صرف لا کی طاق قوا سی ج (لا) مشتق ہو اور تمام امثال کی یکساں علامت ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کوئی اصلی قیمت نہیں ہوگی الا اوس صورت میں کہ لا = ۰

ہم نے دو اخر صورتوں میں یہہ لکھا ہی کہ مساوات کی اصلی قیمت کوئی نہیں ہوگی مگر یہہ ہم نے پہلی کہا کہ

کوئی قیمت اوسکی نہین ہوگی اسواسطی کہ اس بات کو ہم جبر مقابلہ کی چھبیسوین باب مین ثابت کرینگے
باتفاق جمہور مساوات بعض صورتون مین ایسی ہوتی ہی کہ اوسکی قیمت تخیلی ہوتی ہے

باب دوم وجود قیمت کی بیان مین

(۲۵) ہم ثابت کرینگے کہ ہریک مساوات صحیح ناطقہ کی ایک قیمت ہوتی ہی خواہ وہ اصلی ہو خواہ خیالی

یعنی اس صورت ا + ب √-۱ کی جسمین ا اور ب اصلی ہین ایسی جملہ ا + ب √-۱ کو جسمین ا اور ب اصلی ہون جملہ خیالی کہتی ہین اسکی یہہ معنی ہین کہ جب ہم لفظ خیالی کا کسی جملہ کی ساتھہ استعمال مین لائین تو اوسی مراد یہہ ہوتی ہی کہ وہ جملہ ا + ب √-۱ کی صورت کا ہی اور اوسمین ا اور ب اصلی ہین

(۲۶) طالب علم اس بات کو جانتی ہین کہ بعض باتین باتفاق جمہور ایسی مقرر ہوتی ہین کہ جنکی سبب سے ہم تحقیقات جبریہ مین خیالی جملون سے بحث کرسکتی ہین اور اونکی باب مین بعض مسائل قائم کرسکتی ہین مثلاً ا^۲ + ب^۲ کی جذر کی مثبت قیمت قالب ہریک جملہ ا + ب √-۱ اور ا - ب √-۱ کا کہلاتا ہے اور اس حدود کی استعانت سی یہہ ہم ثابت کرسکتی ہین کہ دو خیالی جملون کی حاصل ضرب کا قالب ان دو جملون کی قالبون کا حاصل ضرب ہوتا ہی

اسواسطی کہ حاصل ضرب ا + ب √-۱ اور اَ + بَ √-۱ کا

ا اَ - ب بَ + (ا بَ + اَ ب) √-۱ اور قالب انکا مثبت قیمت جذر (ا اَ - ب بَ)^۲ + (ا بَ + اَ ب)^۲ کی یعنی (ا^۲ + ب^۲) (اَ^۲ + بَ^۲) کی ہی اور اسکی یہی معنی ہین کہ دو معلوم جملون کے قالبون کا حاصل ضرب یہہ قالب ہے

اور نیز جملہ ا + ب √-۱ اوس حالت مین معدوم قرار دیا گیا ہی کہ ا اور ب معدوم ہوجائین پس اب یہہ ثابت ہوا کہ اگر حاصل ضرب دو خیالی جملون کا معدوم ہوتا ہے تو ایک جملہ کا قالب بھی معدوم ہوجاتا ہی اور ایسی ہی اگر حاصل ضرب دو یا زیادہ خیالی جملون کا معدوم ہوتا ہے تو خود ایک جملہ بھی معدوم ہوتا ہی اور اگر ایک خود جملہ معدوم ہوجاتا ہے تو اوسکا حاصل ضرب بھی معدوم ہوجاتا ہے

(۲۷) جن طالب علمون نے خیالی جملون پر توجہ نہ کی ہو اب وہ بڑے جبر مقابلہ کی چھبیسوین باب کو دیکھین

اب ایک بات بہت مشکل ہم ثابت کرتی ہین کہ ہر ایک مساوات ایک قیمت رکہتی ہی خواہ وہ قیمت اصلی ہو یا خیالی ہو + یہہ بہتر معلوم ہوتا ہی کہ بالفعل طالب علم اس امر کو یون ہی تسلیم کر لی اور آگی کام چلائی اور اس باب کو آگی چہوڑ دی اور پہر جب کچہہ اس رسالہ کو پڑہ لی تو پہر اوسکو مطالعہ کری اول اس مسئلہ کے سمجہنی مین دقت نہ اٹہائی

(۲۸) اول ہم یہہ ثابت کرتی ہین کہ چارون معادلات ذیل مین ایک ایک قیمت وجود رکہتی ہے خواہ وہ قیمت اصلی ہو یا خیالی

$$\text{لا}^{\text{ن}} = 1 \quad \text{لا}^{\text{ن}} = -1 \quad \text{لا}^{\text{ن}} = +\sqrt{-1} \quad \text{لا}^{\text{ن}} = -\sqrt{-1}$$

(۱) $\text{لا}^{\text{ن}} = 1$ مین ظاہر ہے کہ $\text{لا} = 1$ ایک قیمت مساوات کی ہے

(۲) $\text{لا}^{\text{ن}} = -1$ اگر ن طاق عدد ہو تو ظاہر ہی کہ $\text{لا} = -1$ کی ایک قیمت مساوات کی ہوگی اگر ن زوج ہو تو اوسکو برابر ۲م کی فرض کرو تو یہہ ثابت کرنا ہوگا کہ مساوات $\text{لا}^{\text{۲م}} = -1$ کا ایک حل ہی اور اسکی معنی یہی ہین کہ ہم یہہ ثابت کر دین کہ مساوات $\text{لا}^{\text{م}} = \pm\sqrt{-1}$ کا ایک حل ہی اسلئی اسکا حل یہی باقی دو ذیل کی مساواتون کی حل مین داخل ہو گیا

(۳) $\text{لا}^{\text{ن}} = +\sqrt{-1}$ اگر ن طاق ہو تو اوسکی دو صورتین ۴م+۱ اور ۴م+۳ کی ہونگین

اول صورت مین $+\sqrt{-1}$ ایک قیمت ہی اسلئی کہ $(+\sqrt{-1})^{\text{۴م}+1} = +\sqrt{-1}$

اور دوسری صورت مین $-\sqrt{-1}$ ایک قیمت ہوگی کیونکہ $(-\sqrt{-1})^{\text{۴م}+3} = +\sqrt{-1}$

اگر ن ایک جفت عدد ہی تو فرض کرو کہ وہ م ع کی برابر ہی اسمین م ایک طاق عدد ہی اور ع کوئی سی قوت ۲ کی مثلاً $2^{\text{ق}}$ ہی $\text{ء} = \text{لا}^{\text{م}}$ کی رکہو تو مساوات $\text{لا}^{\text{م ع}} = +\sqrt{-1}$ کو اسطرح لکہہ سکتے ہین کہ $\text{ء}^{\text{ع}} = +\sqrt{-1}$ اور ابہی ہم ثابت کر آئی ہین کہ $+\sqrt{-1}$ ایک مناسب قیمت ء کی ہی

اگر م کی صورت ۴ر+۱ ہو اور $+\sqrt{-1}$ ایک مناسب قیمت ء کی ہے

اگر م کی صورت ۴ر+۳ کی ہو اب ہم کو لا کی قیمت ایسی دریافت کرنی باقی رہی کہ جسمی شرائط $\text{لا}^{\text{ع}} = +\sqrt{-1}$ اور $\text{لا}^{\text{ع}} = -\sqrt{-1}$ کی پوری ہون اسمین $\text{ع} = 2^{\text{ق}}$

قیمت مطلوب اسکی جبر مقابلہ کی ایک معمولی عمل سی اسطرح حاصل ہوسکتی ہی کہ جذر + $\sqrt{-1}$ کا لو یا − $\sqrt{-1}$ کا نکالو اسی ایک جملہ سہ + صہ $\sqrt{-1}$ حاصل ہوگا جسمین سہ اور صہ اصلی ہونگے اب جذر سہ + صہ $\sqrt{-1}$ کا لو تو اسی جذر اسکے متماثل ایک جملہ ہوگا اور علی ہذالقیاس جبر مقابلہ کا چھبیسواں باب دیکھو جب ہم ق دفعہ جذر نکالین تو ایک جملہ
ا + ب $\sqrt{-1}$ حاصل ہوگا اور (ا + ب $\sqrt{-1}$)^{ن} = + $\sqrt{-1}$ یا = − $\sqrt{-1}$

(۴) لا^{ن} = − $\sqrt{-1}$ پر مثل (۳) کی عمل کرو اگر ن طاق عدد ہو اور ۴م + ۱ کی صورت کا ہو تو − $\sqrt{-1}$ قیمت ہوگی اور جب ۴م + ۳ کی صورت کا ہو تو + $\sqrt{-1}$ ایک قیمت ہوگی اور اگر ن جفت قوت ہو تو اوسکو برابر م ع کی فرض کرو جسمین م طاق عدد ہی اور ع = ۲^{ق} اور اب عمل موافق سابق کرو

(۲۹) ہر ایک مساوات صحیح ناطقہ کی ایک اصلی یا خیالی قیمت ہوتی ہے

فرض کرو کہ ج (لا) = ع. لا^{ن} + ع۱ لا$^{ن-۱}$ + ع۲ لا$^{ن-۲}$ + ... + ع$_{ن-۲}$ لا^{۲} + ع$_{ن-۱}$ لا + ع$_{ن}$ اور مثال ع. و ع۱ و ... ع$_{ن-۲}$ و ع$_{ن-۱}$ و ع$_{ن}$ کیا اصلی ہیں یا خیالی ہیں اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک قیمت کیا اصلی یا خیالی ہوگی اگر بجائی لا کی کوئی جملہ خیالی ج (لا) مین بدل کرین تو حاصل لو + مو $\sqrt{-1}$ کی صورت کا حاصل ہوگا اور اسمین لو اور مو اصلی مقادیر ہونگی اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ ایک جملہ خیالی ایسا ہی کہ وہ لو = ۰ اور مو = ۰ کی کرتا ہی اور اس بات کو ہم اسطرح ثابت کرتے ہین کہ چونکہ لو^{۲} + مو^{۲} ہمیشہ ایک اصلی مثبت مقدار ہی اگر وہ صفر نہ ہوگی تو کوئی قیمت ایسی اوسکی ضرور ہونی چاہئی کہ وہ کسی اور قیمت سی بڑی نہ ہو یعنی کوئی ایسی قیمت ہونی چاہی کہ وہ گھٹ نہ سکی لیکن اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ لو^{۲} + مو^{۲} کی کوئی قیمت سوا صفر کی ہو تو ہم اوس جملہ مین کہ لا کی واسطے رکھا جاہے ایک مناسب تغیر پیدا کر کے اوس قیمت کو گھٹا سکتی ہین اور اسسے یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ لو^{۲} + مو^{۲} قابلیت صفر ہونی کی رکھتا ہی یعنی لو اور مو دونو ایک ہی وقت معدوم ہوجاتے ہین

فرض کرو کہ لا کی ایک خاص قیمت یعنی ا + ب $\sqrt{-1}$ مقرر کی گئی ہی اور اوسکی مندرج کرنے سے ج (لا) کا ع + ق $\sqrt{-1}$ کی صورت کا ہوجاتا ہی اسمین ع اور ق دونو صفر نہین ہین اب

ا + ب √-١ + صہ کو لا کی جگہ ج (لا) مین رکھو اب قیمت ج (لا) کی جو صورت پیدا ہوگی وہ اسطرح دریافت ہوگی
اول ج (لا + صہ) کو قوا صہ مین پہیلائین اور پہر ا + ب √-١ کو بجای لا کی رکہین پس فرض کرو

ج (لا + صہ) = لا + صہ لاَ + صہ^٢/٢ لاً + ... + صہ^ن/|ن ع . لن

اسمین لاَ اور لاً اور لاً ... جملہ لا کے ہین دفعہ ١٠ کو دیکہو
لا کی جگہ ا + ب √-١ رکہو تو لا کی صورت عر + قر √-١ کی ہو جائیگی
بعض امثال لاَ اور لاً ... کی لا کی اس قیمت سی فنا ہو جائینگی مگر وہ سب کے سب معدوم
لا کی اس قیمت سی نہین ہو سکتی کیونکہ آخر امثال صہ^ن/|ن کا ع . لن ہے
فرض کرو کہ صہ^م سب سے ادنی درجہ کی قوت صہ کی ہی جسکی امثال فنا نہین ہوتی اور صہ^م کے
کے امثال کو مر + صر √-١ سی تعبیر کرو اسمین مر اور صر دونو صفر نہین ہین پس جب ا + ب √-١ + صہ
لا کی جگہ رکہا جای تو ج (لا) یہہ ہو جاتا ہے کہ

عر + قر √-١ + (مر + صر √-١) صہ^م + ...

جن قیمون کو لکہا نہین اونمین صہ کی قوا بڑی صہ^م ملتف ہین اسکو عَر + قَر √-١ سے تعبیر کرو
فرض کرو کہ صہ = بدطر اسمین بد ایک اصلی مثبت مقدار ہی بموجب دفعہ ٢٨ کی یہہ ہمارے اختیار مین ہے کہ
طر کو ایسا مقرر کرین کہ طر^م کیا +١ ہو یا -١ پس اسی یہہ ہم حاصل کر سکتے ہین کہ

عَر + قَر √-١ = عر + قر √-١ ± (مر + صر √-١) بد^م + ...

پس عَر = عر ± مر بد^م + ...

قَر = قر ± صر بد^م + ...

عَر^٢ + قَر^٢ = عر^٢ + قر^٢ ± ٢ (عر مر + قر صر) بد^م + ...

جو رقمین کہ یہان لکہی نہین اونمین بد^م سے بڑی قوا بد کے ملتف ہونگے
اب بموجب دفعہ ١٤ کی بد کو ہم ایسا چہوٹا مقرر کر سکتی ہین کہ عَر^٢ + قَر^٢ کے قیمت مین جو تمام
رقمین بد^م سے ملتف ہون اونکی وہی علامت ہو جو ± ٢ (عر مر + قر صر) بد^م کی علامت ہی

بشرطیکہ عرمر + فرصر صفر نہ ہو

اب ہم اول یہہ فرض کرتی ہین کہ عرمر + فرصر صفر نہین ہی تو علامت عرَ² + قرَ² - عر² - قر²
وہی علامت ہے جو علامت ± ۲ (عرمر + فرصر) بدم کی جسمین لا کافی چھوٹا مقرر کیا گیا ہے
اور ہم اس بات کو یقینی جان سکتی ہین کہ یہہ علامت منفی بموجب اس فرض کے ہو گی کہ
اگر عرمر + فرصر مثبت ہو تو طرم ہو ۱- اور اگر عرمر + فرصر منفی ہو تو طرم ہو ۱+
پس اسواسطی عرَ² + قرَ² کو چھوٹا عر² + قر² سے کر سکتی ہین

دوم یہہ فرض کرو کہ عرمر + قرصر صفر ہی تو بجای طرم = ± ۱ کے
فرض کرنی کی طرم = ± ۱-√ فرض کرو اور پھر موافق سابق کی عمل کرو تو یہہ حاصل ہو گا کہ

عرَ + قرَ ۱-√ = عر + قر ۱-√ ± (مر + صر ۱-√) بدم ۱-√ + . . .

پس عرَ = عر ∓ صر بدم + . . .

قرَ = قر ± مر بدم + ...

اور عرَ² + قرَ² = عر² + قر² ± ۲ (قرمر - عرصر) بدم + . . .

اسمین ارقام جنمین بدم سے بد کے اعلی قوتین ملتف ہوں نہین لکھی ہین

اب (عرمر + قرصر)² + (قرمر - عرصر)² = (عر² + قر²) (مر² + صر²)

اور یہہ برابر صفر کی نہین ہو سکتا اسواسطی کہ عر² + قر² بموجب فرض کے برابر صفر کی نہین ہے اور مر² + صر²
ثابت ہو چکا ہی کہ سوا صفر کے ہی پس اس سبب سے کہ عرمر + قرصر صفر ہے
قرمر - عرصر صفر نہین ہی اسواسطے علامت عرَ² + قرَ² - عر² - قر² کے علامت وہی ہو گی جو
علامت ± ۲ (قرمر - عرصر) بدم کی ہی جسمین بد کافی چھوٹا فرض کیا گیا ہی اور ہم اس
بات کو یقینی جان سکتی ہین کہ یہہ علامت منفی بموجب اس فرض کی ہو گی کہ اگر قرمر - عرصر مثبت ہو تو
طرم ہو ۱-√ اور اگر قرمر - عرصر منفی ہو تو طرم ۱-√ یا ۱-√ + ہو اسواسطے ہم
عرَ² + قرَ² کو چھوٹا عر² + قر² سے فرض کر سکتے ہین

پس ہم نی اسطرح یہہ ثابت کردیا کہ $\text{لو}^2+\text{مو}^2$ کی قیمت جب مختلف صفر سی ہو تو ہم اوس قیمت کو اسطرح گہٹا سکتی ہین کہ لا کی بجای جو جملہ رکہا جاے اوسمین ایک مناسب تغیر کردین یعنی $\text{لو}^2+\text{مو}^2$ قابل ایسکے نہین ہی کہ کوئی مثبت قیمت اوسکی ایسی ہو کہ وہ گہٹ نہ سکی جو کچہہ ہم نی بیان کیا اوس سے معلوم ہوتا ہی کہ یہہ ممکن ہی کہ لو = ۰ اور مو = ۰ کے ایک ہی وقت مین ہو سکتی ہین

(۳۰) اب یہہ ثابت کرنا باقی رہا کہ ا اور ب جملہ $\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}$ مین جو لا کی بجای مندرج کرنے سے ج (لا) کو معدوم کرتا ہی مثناہی ہے

$$\text{ج}(\text{لا}) = \text{ع}_{\cdot}\,\text{لا}^{\text{ن}} \left\{ 1 + \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_{\cdot}\,\text{لا}} + \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_{\cdot}\,\text{لا}^2} + \cdots + \frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\cdot}\,\text{لا}^{\text{ن}}} \right\}$$

اب بجای لا کے $\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}$ رکہو تو ج (لا) کی یہہ صورت ہو گی کہ

$$\text{ع}_{\cdot}\left(\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}\right)^{\text{ن}} \left[1 + \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_{\cdot}\left(\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}\right)} + \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_{\cdot}\left(\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}\right)^2} + \cdots + \frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\cdot}\left(\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}\right)^{\text{ن}}} \right]$$

اب جو سلسلہ خطوط وحدانی کی درمیان ہی اوسمین سی کسی رقم کو مثلاً اوس رقم کو جسمین ع_2 ملتف ہو لو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_{\cdot}\left(\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}\right)^2} = \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_{\cdot}} \cdot \frac{\left(\text{ا} - \text{ب}\sqrt{-1}\right)^2}{\left(\text{ا}^2 + \text{ب}^2\right)^2} = \frac{\text{ع}_2\left(\text{ا}^2 - \text{ب}^2\right)}{\text{ع}_{\cdot}\left(\text{ا}^2 + \text{ب}^2\right)^2} - \frac{2\,\text{ع}_2\,\text{ا}\,\text{ب}\sqrt{-1}}{\text{ع}_{\cdot}\left(\text{ا}^2 + \text{ب}^2\right)^2}$$

$= \text{با} + \text{بب}\sqrt{-1}$ سے مقرر کرو

اب یہہ ظاہر ہی کہ جب ا اور ب غیر متناہی زیادہ ہوتی ہین تو با اور بب غیر متناہی کم ہوتے ہین پس جب لا $= \text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}$ کے ہو تو ج (لا) کی قیمت کو $\text{لو} + \text{مو}\sqrt{-1}$ کے تعبیر کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{لو} + \text{مو}\sqrt{-1} = \text{ع}_{\cdot}\left(\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}\right)^{\text{ن}} \left[1 + \text{با} + \text{بب}\sqrt{-1} \right]$$

اسمین با اور بب کی غیر متناہی زیادہ ہونی سی با اور بب لانہایت کم ہوتی ہین اور یہہ بہی ہم کو حاصل ہے کہ

$$\text{لو} - \text{مو}\sqrt{-1} = \text{ع}_{\cdot}\left(\text{ا} - \text{ب}\sqrt{-1}\right)^{\text{ن}} \left[1 + \text{با} - \text{بب}\sqrt{-1} \right]$$

$$\text{پس}\quad \text{لو}^2 + \text{مو}^2 = \text{ع}_{\cdot}^2\left(\text{ا}^2 + \text{ب}^2\right)^{\text{ن}} \left[\left(1 + \text{با}\right)^2 + \text{بب}^2 \right]$$

اور یہہ لاانتہا زیادہ ہوتا جبکہ ا اور ب لاانتہا زیادہ ہوں کیونکہ ایک جز ضربی $\left(\text{ا}^2 + \text{ب}^2\right)^{\text{ن}}$

غیر متناہی زیادہ ہوتا ہی اور ایک جز ضربی (۱ + ا)^۲ + ب^۲ کی نہایت الانتہا کی طرف پہونچتی ہے پس تو ۲ + م۲ اوس حالت میں معلوم نہیں ہو سکتی کہ ا اور ب لا انتہا زیادہ ہوں یا ایک اونمیں سی غیر متناہی زیادہ ہو

(۳۱) اس بات پر بھی خیال کرنا چاہیے کہ دفعہ ۲۹ کی اثبات میں مساوات مفروضہ کی مثال اصلی اور خیالی دونو ہو سکتی ہیں مگر اگلی کتاب میں سب جگہ امثال سے مثال اصلی مراد ہیں بشرطیکہ اوسکی خلاف کہیں نہ بیان کیا گیا ہو

(۳۲) مساوات کی ایک قیمت کی ہونی کا جو اثبات لکھا گیا ہی اوسکو کوچی صاحب کا اثبات کہتی ہیں ایا اس مضمون پر بہہ مباحثہ عظیم ہوا ہی اوسکی تمام کیفیت کیمبرج کی فلوزوفیکل سوسایٹی کی دسوین جلد میں لکھی ہی اوسمین ایک بحث ڈی مورگن صاحب نی لکھی ہی اور دوسری مسٹر ایری صاحب نی لکھی اور پھر ایری صاحب کی بحث کا ایک تکملہ بھی اوسمین موجود ہی ڈی مورگن صاحب نی لکھا ہی کہ جو اثبات کہ کوچی صاحب کا مشہور ہے وہ پہلی ارگیند صاحب نے لکھا ہے

تیسرا باب خواص معادلات

(۳۳) جتنی درجہ کی مساوات ہوتی ہی اوتنی ہی اوسمین قیمتیں ہوتی ہیں

فرض کرو کہ مساوات ن درجہ کی ہی اور ج (لا) = ۰ سے تعبیر ہوتی ہے اسمین

ج (لا) = ع. لا^ن + ع۱ لا^(ن-۱) + ع۲ لا^(ن-۲) + ۰۰۰۰ + ع ن-۱ لا + ع ن

بموجب باب دوم کی اس مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک قیمت ضرور ہوگی خواہ وہ اصلی ہو یا خیالی اس قیمت کو ا۱ سی تعبیر کرو تو بموجب دفعہ ۱۴ کی ج (لا) پورا لا - ا۱ پر تقسیم ہوگا اور اسلئی

ج (لا) = (لا - ا۱) مح۱ (لا) اسمین مح۱ (لا) کوئی جملہ جبریہ صحیحہ لا کا (ن - ۱) درجہ کا ہی اب پھر بموجب باب دوم کی مح۱ (لا) = ۰ کی ایک قیمت اصلی یا خیالی ہے اوسکو ا۲ سی تعبیر کرو تو بموجب دفعہ ۱۴ کی مح۱ (لا) پورا لا - ا۲ پر تقسیم ہوگا اور اسیواسطے

مح۱ (لا) = (لا - ا۲) مح۲ (لا) اسمین مح۲ (لا) ایک جملہ صحیحہ جبریہ لا کا (ن - ۲) درجہ کا ہی اسیواسطے ج (لا) = (لا - ا۱) (لا - ا۲) مح۲ (لا) اور اسیطرح عمل کرنے سے ن اجزا ضربی لا - ا۱ اور لا - ا۲ اور ۰۰۰ لا - ان حاصل ہونگے

اور ایک اور جزضربی ع ہوگا کیونکہ اعشاری لان کے ج (لا) مین ع ہے پس

ج (لا) = ع (لا - ا۱) (لا - ا۲) (لا - ا۳) . . . (لا - ان)

اسی معلوم ہوا کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی ن قیمتین ہین کیونکہ ن مقادیر

ا۱ و ا۲ . . . ان مین سی کوئی مقدار بجائی لا کی ج (لا) مین رکہین تو وہ اوسکو معدوم

کردیگی اور اس مساوات کی ن قیمتون سی زیادہ کوئی قیمت نہ ہوگی اسلئی کہ اگر لا کے کوئی اور قیمت

س جو ن قیمتون ا۱ اور ا۲ . . . ان مین سی نہ ہو مقرر کرین تو ج (لا) یہہ ہو جایگا

کہ ع . (س - ا۱) (س - ا۲) (س - ا۳) . . . (س - ان)

اب یہہ صفر نہین ہو سکتا اسواسطے کہ ہریک جز ضربی اسکا مختلف صفر سی ہی اور حاصل ضرب اجزاء ضربی کا خواہ اصلی ہو یا خیالی ہو معدوم نہین ہو سکتا جب تک کہ کوئی جز ضربی خود معدوم نہ ہوتا ہو دفعہ ۲۶ کو دیکہو

(۳۴) دفعہ گذشتہ مین تمام قیمتین کیا اصلی ہونگین یا اس صورت ا۱ + ب √-۱ کی اسمین ا اور ب اصلی ہین اور بعض قیمتین ا۱ اور ا۲ . . . ان مین برابر بہی ہو سکتی ہین اسلئی کچہہ ضرور نہین کہ ن درجہ کی مساوات کی ن مختلف قیمتین ہی ہون شاید طالب علم اس بات پر مناقشہ کری گا کہ ن درجہ کی مساوات کی ن قیمتین کسطرح ہو سکتی ہین جب کہ اونکا اسمین مختلف ہونا ضرور نہ ہو تو ہم یہہ کہتی ہین کہ اسمین بڑی اسانی ہی کہ ن درجہ کی مساوات کی ن ہی قیمتین کہی جائین گو اونمین بعض قیمتین اسمین برابر ہون جیسا کہ جبر مقابلہ مین مساوات درجہ دوم ا لا۲ + ب لا + ح = ۰ مین بیان کیا گیا ہے کہ جب ب۲ = ۴ ا ح تو اوسکی دو برابر قیمتین گننی مین بہ نسبت ایک قیمت گننی کی اسانی ہے

(۳۵) اب جو ہم نی امکان مساوی قیمتون کے داخل ہونی کا بیان کیا اوسکا اثر دفعات گذشتہ مین سے صرف ایک دفعہ ۲۲ پر ہوتا ہی اوس دفعہ مین یہہ ثابت کیا ہی کہ مساوات خاص صورت کی دو مختلف مثبت قیمتین نہین ہو سکتین لیکن اس بات کو اثبات مین نہین ثابت کیا ہی کہ جس قیمت کا ہونا ضرور ہے اوسکی برابر ایک قیمت یا کئی قیمتون کا ہونا ممکن نہین جب ہم دس کارٹیس صاحب کا قاعدہ علامات ثابت کرینگی اوسوقت یہہ بات ظاہر ہو جائیگی کہ مساوات جسپر بحث کی گئی ہی ایک قیمت رکہتی ہی اور وہ مکرر نہین اتی

(۳۶) اگر مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک قیمت $ا_1$ ہم کو معلوم ہو تو ہم کو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ج (لا) = $(لا - ا_1)$ $مح_1$ لا جہین $مح_1$ لا ایک جملہ لا کا ایک درجہ کم ج (لا) سے ہے اور باقی قیمتین ج (لا) = ۰ کی دریافت ہوسکتی ہین اگر ہم مساوات $مح_1$ (لا) = ۰ کو جو مساوات ایک درجہ کم بہ نسبت ج (لا) = ۰ کی ہی حل کرین اور علی ہذا القیاس اگر ہم کو دو قیمتین $ا_1$ اور $ا_2$ مساوات ج (لا) = ۰ معلوم ہون تو ہم کو معلوم ہی کہ ج (لا) = $(لا - ا_1)(لا - ا_2)$ $مح_2$ (لا) جہین $مح_2$ (لا) ایک جملہ لا کا دو درجہ کم بہ نسبت ج (لا) کی ہی اور باقی قیمتین ج (لا) = ۰ کی مساوات $مح_2$ (لا) = ۰ کی حل کرنی سی دریافت ہوسکتی ہین یہہ مساوات دو درجہ کم بہ نسبت ج (لا) = ۰ کے ہے اور علی ہذا القیاس

(۳۷) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ن درجہ کا ہو تو ہم نی یہہ ثابت کر دیا ہی کہ ج (لا) اول درجہ کے ن اجزاء ضربی مین تحلیل ہونی کی ایسی قابلیت رکھتا ہے کہ

$$ج(لا) = ع_0 (لا - ا_1)(لا - ا_2) \cdots (لا - ا_ن)$$

جہین $ا_1$ و $ا_2$ ... $ا_ن$ کیا اصلی یا خیالی ہین اس بات پر غور کرنی چاہیئی کہ ج (لا) جن اجزاء ضربی مین تحلیل ہوسکتا ہی اوسکا نظم ایک ہی ہوتا ہی جب مقادیر $ا_1$ اور $ا_2$ ... $ا_ن$ سب غیر مساوی ہون تو ایک نظم کا اجزاء ضربی مین ہونا ظاہر ہی مگر جب بعض مقادیر $ا_1$ و $ا_2$ و $ا_3$ ... $ا_ن$ مین مساوی ہون تو ج (لا) کی مختلف طور سی اسطرح ترکیب نہین پاسکتا کہ ایک ہی اجزاء ضربی کے مختلف قوت نما ہون اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو

$$ج(لا) = ع_0 (لا - ا_1)^{ر} (لا - ا_2)^{ص} (لا - ا_3)^{ط} \cdots$$

اور $$ج(لا) = ع_0 (لا - ا_1)^{س} (لا - ا_2)^{ص} (لا - ا_3)^{ط} \cdots$$

اب فرض کرو کہ ر بڑا س سی ہی تو $(لا - ا_1)^{س}$ پر تقسیم کرنے سے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ع_0 (لا - ا_1)^{ر-س} (لا - ا_2)^{ص} (لا - ا_3)^{ط} \cdots = ع_0 (لا - ا_2)^{ص} (لا - ا_3)^{ط} \cdots$$

اب داہنی طرف کا رکن مساوات لا = $ا_1$ کی ہونی سی معدوم ہوتا ہی مگر بائین طرف کا رکن معدوم

نہین ہوتا اسلئی ان جملون مین تطبیق نہین ہوسکتی ہی ثابت ہوا کہ ج (لا) کی اجزا ضربی کا نظم ایک ہی ہوتا ہے

(۳۸) اگر کوئی ن درجہ کا جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ن مختلف لا کی قیمتون سی زیادہ قیمتون سی معدوم ہوتا ہو تو جملہ مین ہر امثال صفر ہوگا اور جملہ ہی لا کی ہر قیمت کی موافق صفر ہوگا

اسواسطی کہ اگر جملہ لا مین کوئی امثال صفر نہ ہو تو لا کی مختلف قیمتون سی جو تعداد مین ن سے زیادہ ہون جملہ معدوم نہ ہوگا پس اگر ن سی زیادہ مختلف قیمتون سے لا کی جملہ معدوم ہوتا ہے تو ہر یک امثال جملہ مین صفر ہونا چاہیے

(۳۹) دفعہ گذشتہ مین جو ثبوت لکھا ہے وہ مسئلہ کی اثبات کو موقوف اس بات پر کرتا ہی کہ مساوات ن درجہ کی ن قیمتین ہوتی ہین اور اخر کار یہہ مقدمہ باب دوم کی تحقیقات پر موقوف ہوجاتا ہے

لیکن اسی مسئلہ کو ہم استقرا سی بہی ثابت کر سکتی ہین اور پہر اوسکی واسطی ضرورت باب دوم کی تحقیقات کی نہین ہے

فرض کرو کہ لا کا جملہ جو ن درجہ کا ہو وہ ن سی زیادہ قیمتون کے موافق معدوم ہوتا ہو اور جملہ کے ہر امثال صفر ہی تو اب ہم یہہ ثابت کرنا چاہتی ہین کہ لا کا جملہ (ن + ۱) درجہ کا ن + ۱ مختلف قیمتون سے زیادہ قیمتون سی معدوم ہوگا اور ہر یک امثال جملہ مین صفر ہوگا

فرض کرو کہ ج (لا) = ق. لا^ن+۱ + ق۱ لا^ن + ق۲ لا^ن-۱ ... + ق ن لا + ق

اور فرض کرو کہ (ن + ۱) قیمتون سی زیادہ قیمتین لا کی ج (لا) کو فنا کرتی ہین اور ا ایک قیمت ان قیمتون مین ایسی ہی کہ ج (ا) = ۰ کی ہوتا ہی تو ج (لا) = ج (لا) − ج (ا)

= ق. (لا^ن+۱ − ا^ن+۱) + ق۱ (لا^ن − ا^ن) + ق۲ (لا^ن-۱ − ا^ن-۱) + ... + ق ن (لا − ا)

اسکو اس صورت سی لکہہ سکتی ہین کہ

ج (لا) = (لا − ا) مج (لا)

اسمین مج (لا) جملہ لا کا ن درجہ کا ہے

چونکہ لا کی ن مختلف قیمتون سی زیادہ ایسی قیمتین کہ ج (لا) کو معدوم کرتی ہین اور ان قیمتون سے ا خارج ہے تو لا کی ن مختلف قیمتون سی زیادہ قیمتین ایسی ہونگین کہ مج (لا) کو فنا کرتی ہین اور اسیواسطے بموجب فرض کے ہر یک امثال مج (لا) مین صفر ہی اب بموجب دفعہ ۷ کے

مج (لا) = ق٠ لا^ن + (ق٠ ا + ق١) لا^(ن−١) + (ق٠ ا^٢ + ق١ ا + ق٢) لا^(ن−٢) ...

پس ق٠ = ٠ کیونکہ لا^ن کا امثال صفر ہی پس ق١ = ٠ کیونکہ لا^(ن−١) کا امثال صفر ہے

تو ق٢ = ٠ کیونکہ لا^(ن−٢) کا امثال صفر ہی اور علی ہذا القیاس

پس ج (لا) مین ہر یک امثال صفر ہے

اسی دعوی ثابت ہی کیونکہ یہہ ہم کو معلوم ہی کہ وہ اول اور دوم درجہ کی جملون کے صورت مین ثابت ہے

(۴۰) اگر ج (لا) ن درجہ کا جملہ لا کا ہو تو ہم نی ثابت کر دیا ہی کہ ج (لا) اول درجہ کے ن اجزاء ضربی مین تحلیل ہو سکتا ہی ان اجزاء ضربی مین سی ہر یک ج (لا) کو پورا تقسیم کریگا

تو ج (لا) کی ن مقسوم علیہ پوری بانٹنی والی ہونگی اور حاصل ضرب ان اجزاء ضربی مین سی کسی دو اجزاء ضربی کا درجہ دوم کا جزء ضربی ج (لا) کا ہوگا اور اسیواسطے

ج (لا) کی ن(ن−١)/(١.٢) مقسوم علیہ پوری بانٹنی والی درجہ دوم کے ہونگی اور اسیطرح عمل کرنے سے

ہم کو معلوم ہوگا کہ ج (لا) کی مقسوم علیہ پوری بانٹنی والی ر درجہ کی اوتنی ہونگی جتنی کہ اجتماع

ن اشیا مین سی ر اشیا کی ہوتی ہین یعنی ج (لا) کی ر درجہ کے مقسوم علیہ پوری بانٹنی والی ن(ن−١)...(ن−ر+١)/لر ہونگی

لیکن اس بات کو بہی یاد رکہنا چاہئی کہ مقسوم کسی درجہ کے مثلاً دوم درجہ کی یہہ ضرور نہین کہ مختلف ہی ہون

کیونکہ یہہ کچہہ ضرور نہین ہے کہ اول درجہ کی اجزاء ضربی سب مختلف ہون غرض خلاصہ مطلب یہہ ہے

کہ ر درجہ کی مختلف مقسوم علیہ ن(ن−١)...(ن−ر+١)/لر سے زیادہ نہین ہو سکتی

(۴۱) مساوات جسمین امثال اصلی ہون او سکے قیمتون مین خیالی قیمتون کے ازواج ہوتے ہین یعنی جوڑی ہوتے ہین

فرض کرو کہ ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہی جسمین امثال لا کی سب اصلی ہین پس اگر

سہ + صہ √−١ ایک قیمت مساوات ج (لا) = ٠ کی ہو تو ضرور ہی کہ سہ − صہ √−١ بہی ایک قیمت ہوگی

اسواسطی کہ جب سہ + صہ √−١ کو لا کی جگہ جملہ (لا) مین رکہین تو اوسکی صورت

ع + ق صہ √−١ کی ہوگی جسمین ع اور ق مین صہ کی جفت قوتین ملتی ہین

یہہ بات ظاہر ہی کیونکہ اگر لا کے جملہ کو پہیلائین اور اوسمین لا = سہ + صہ √−١ تو

صہ √-١ کی جفت قوتین اصلی قیمتین پیدا کرینگے اور ہ √-١ صہ کا تعلق طاق قواء ساتہہ ہوگا
اور چونکہ ج (لا) کی امثال سب اصلی مانی گئی ہین ہ √-١ کا
کسی طرح سواء صہ کے طاق قواء کے نہین واقع ہوسکتا
پس اگر سہ - صہ ہ √-١ بجای لا کی ج (لا) مین رکہا جای تو وہ ما حصل حاصل ہوگا
جو لا کی جگہ سہ + صہ ہ √-١ کی رکہنی حاصل ہوا تہا مگر اوسمین صہ کی علامت بدلی ہوئی ہوگی
اسیواسطی ماحصل ع - ق صہ ہ √-١ ہوگا پس اگر سہ + صہ ہ √-١ ایک قیمت ج (لا) = ۰
کی ہو تو چاہی کہ ع = ۰ اور ق = ۰ کے ہو اسلئی مساوات
ع - ق صہ ہ √-١ برابر صفر کے ہوگا اسواسطی سہ + صہ ہ √-١ بہی ایک قیمت مساوات
ج (لا) = ۰ کے ہوگی

(۴٢) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور اوسمین سب امثال اصلی ہون اور ایک جز ضربی اوسکا
لا - ا١ ہو اور اسمین ا١ = سہ + صہ ہ √-١ کے ہو تو اوسکا دوسرا جز ضربی
لا - ا٢ ہوگا جسمین ا٢ = سہ - صہ ہ √-١ ہوگا اور حاصل ضرب ان دو اجزاء ضربی
لا - سہ - صہ ہ √-١ اور لا - سہ + صہ ہ √-١ کا (لا - سہ)٢ + صہ٢ یعنی
لا٢ - ٢ سہ لا + سہ٢ + صہ٢ ہی یعنی حاصل ضرب ایک اصلی درجہ دوم کا جز ضربی ہے

(۴٣) پس ہم کو یہہ نتیجہ حاصل ہوا کہ ہر جملہ صحیحہ ناطقہ لا کو جسمین سب اصلی مثال ہون یون خیال کر سکتی ہین
کہ وہ حاصل ضرب اصلی اجزاء ضربی کا ہی خواہ وہ اول درجہ کی ہون یا درجہ دوم کی ج (لا)
اس صورت کا ہوگا کہ (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) . . . (لا - ک) مج (لا) اسمین
ا اور ب اور س . . ک سب اصلی قیمتین ج (لا) = ۰ کی ہین اور مج (لا) وہ جملہ ہے جسمین
حاصل ضرب درجہ دوم کی اجزاء ضربی کا ہی اور اوسکی علامت نہین بدل سکتی

(۴۴) دفعہ ۴١ کی طرح یہہ دعوی بہی ثابت ہو سکتا ہی کہ اگر ج (لا) جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور امثال بہی
اوسکی ناطقہ ہون اور مساوات ج (لا) = ۰ کی قیمت ا + ہ √ب کے صورت کے ہو تو

جسمین ا + √ب ایک مقدار اصم ہی تو اوس مساوات کی ا - √ب بھی ضرور ہوگی
پس ج (لا) کا ایک جز ضربی درجہ دوم کا (لا - ا)^۲ - ب ہوگا

(۴۵) جملہ ج (لا) اور مساوات ج (لا) = ۰ کی امثال مین جو ارتباط باہمی ہو اوسکو دریافت کرو

فرض کرو کہ ج (لا) = لا^ن + ع۱ لا^(ن-۱) + ع۲ لا^(ن-۲) + ۰۰۰ + ع ن-۱ لا + ع ن

اور فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی قیمتین ا۱ اور ا۲ ۰۰۰ ان ہین تو

ج (لا) = (لا - ا۱) (لا - ا۲) ۰۰۰ (لا - ان)

چونکہ دونو صورمفصلہ بالا نیہ ج (لا) کی مساوات متطابقہ ہین انکی امثال ع۱ و ع۲ ۰۰۰ ع ن اور مقادیر ا۱ و ا۲ و ان مین باہمی ارتباط ہی اب اس ارتباط کے توضیح ذیل مین کرتی ہین کہ معمولی ضرب کے قاعدہ سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

(لا - ا۱) (لا - ا۲) = لا^۲ - (ا۱ + ا۲) لا + ا۱ ا۲

(لا - ا۱) (لا - ا۲) (لا - ا۳) = لا^۳ - (ا۱ + ا۲ + ا۳) لا^۲

+ (ا۱ ا۲ + ا۲ ا۳ + ا۳ ا۱) لا - ا۱ ا۲ ا۳

(لا - ا۱) (لا - ا۲) (لا - ا۳) (لا - ا۴) = لا^۴ - (ا۱ + ا۲ + ا۳ + ا۴) لا^۳

+ (ا۱ ا۲ + ا۱ ا۳ + ا۱ ا۴ + ا۲ ا۳ + ا۲ ا۴ + ا۳ ا۴) لا^۲

- (ا۱ ا۲ ا۳ + ا۱ ا۲ ا۴ + ا۱ ا۳ ا۴ + ا۲ ا۳ ا۴) لا + ا۱ ا۲ ا۳ ا۴

اب ان ماحصل مین ہم یہہ قوانین دیکھتی ہین کہ

اول بائین طرف مین تعداد ارقام بہ نسبت تعداد اجزاء ضربی کی جو باہم ضرب دی گئی ہین بقدر ایک کے زیادہ ہے

دوم قوت نما لا کا اول رقم مین تعداد اجزاء ضربی کی برابر ہے اور آگے ہر رقم مین قوت نما بقدر ایک کے اپنی ماقبل کی رقم کے قوت نما سی کم ہوتا جاتا ہے

سوم امثال اول رقم کا واحد ہی اور دوسرے رقم کا امثال مجموعہ اجزاء ضربی درجہ اول کے دوسرے رقمون کا ہی اور تیسری رقم کا امثال اجزاء ضربی درجہ اول کی دوسری رقمون مین

سی دو دو رقموں کی حاصل ضربوں کا مجموعہ ہی اور چوتھی رقم کا اشتمال اجزاء ضربی درجہ اول سے دوسری رقموں میں سی تین تین رقموں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہی و علی ہذا القیاس اور آخر رقم اجزاء ضربی درجہ اول کی دوسری کل رقموں کا حاصل ضرب ہے

اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ تعداد اجزاء ضربی درجہ اول کی خواہ کچھہ ہی ہو سب صورتوں پر یہہ قوانین متصرف ہیں فرض کرو کہ ن - اجزاء ضربی جب آپسمین ضرب دیے جائیں تو یہہ قوانین اونمین پائے جاتی ہیں یعنی یہہ فرض کرو کہ

$$(\text{لا}-\text{ا}_1)(\text{لا}-\text{ا}_2)\cdots(\text{لا}-\text{ا}_{\text{ن}-1}) = \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ق}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \text{ق}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-3} + \cdots + \text{ق}_{\text{ن}-2}\,\text{لا} + \text{ق}_{\text{ن}-1}$$

اسمین ق_1 = مجموعہ ارقام $-\text{ا}_1$ و $-\text{ا}_2$ و $-\text{ا}_{\text{ن}-1}$

ق_2 = ان ارقام مین سی دو دو کی حاصل ضربوں کے مجموعہ کے

ق_3 = ان ارقام مین سی تین تین کی حاصل ضربوں کے مجموعہ کے

$\text{ق}_{\text{ن}-1}$ = کل ان ارقام کے حاصل ضرب کے

اس مساوات کے طرفین کو $\text{لا}-\text{ا}_\text{ن}$ مین ضرب دو

$$(\text{لا}-\text{ا}_1)(\text{لا}-\text{ا}_2)\cdots(\text{لا}-\text{ا}_\text{ن}) = \text{لا}^\text{ن} + (\text{ق}_1-\text{ا}_\text{ن})\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + (\text{ق}_2-\text{ق}_1\text{ا}_\text{ن})\,\text{لا}^{\text{ن}-2}$$
$$+ (\text{ق}_3-\text{ق}_2\text{ا}_\text{ن})\,\text{لا}^{\text{ن}-3} + \cdots - \text{ق}_{\text{ن}-1}\text{ا}_\text{ن}$$

اب $\text{ق}_1 - \text{ا}_\text{ن} = -\text{ا}_1 - \text{ا}_2 - \cdots - \text{ا}_{\text{ن}-1} - \text{ا}_\text{ن}$

= مجموعہ کل ارقام $-\text{ا}_1$ و $-\text{ا}_2 \cdots -\text{ا}_\text{ن}$ کے

$\text{ق}_2 - \text{ق}_1\text{ا}_\text{ن} = \text{ق}_2 + \text{ا}_\text{ن}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \cdots + \text{ا}_\text{ن})$

= کل ارقام $-\text{ا}_1$ و $-\text{ا}_2 \cdots \text{ا}_\text{ن}$ مین سے دو دو کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے

$\text{ق}_3 - \text{ق}_2\text{ا}_\text{ن} = \text{ق}_3 - \text{ا}_\text{ن}(\text{ا}_1\text{ا}_2 + \text{ا}_2\text{ا}_3 + \cdots)$

= کل ارقام $-\text{ا}_1$ و $-\text{ا}_2 \cdots \text{ا}_\text{ن}$ مین سی تین تین کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے

- ق ن-۱ ان = حاصل ضرب کل ارقام -ا۱ و -ا۲ . . . . -ان کے

پس اسی ثابت ہوا کہ اگر قوانین مذکور ن-۱ اجزاء ضربی کی ضرب دینی مین پائی جاتی ہین تو وہ ن اجزاء ضربی کی ضرب دینی مین بہی پائی جاتی ہین مگر یہہ ثابت کرائی ہین کہ قوانین مذکور چار اجزاء ضربی کی ضرب دینی مین پائی جاتی ہین اسواسطی وہ پانچ اجزاء ضربی کی ضرب دینی بہی پائے جائینگے اور علی ہذا القیاس پس وہ بالعموم سب صورتون مین موجود ہونگے

اگر ا۱ و ا۲ . . . ان قیمتین مساوات

$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_1 \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ع}_2 \text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}-1}\text{لا} + \text{ع}_{\text{ن}} = 0$ کے ہون

تو دائین طرف کا رکن مساوات برابر ہوگا حاصل ضرب اجزاء ضربی (لا-ا۱) اور (لا-ا۲) . . . (لا-ان) کے اور اسی یہہ نتایج حاصل ہونگی اگر مساوات سادہ صورت مین ہو تو اسمین دوسری رقم کا امثال تمام قیمتون کی مجموعہ کی برابر ہوتا ہی مگر علامت بدلی ہوئی ہوتی ہی اور تیسرے رقم کا امثال برابر ہوتا ہی دو دو قیمتون کی حاصل ضربون کی مجموعہ کی مگر قیمتون کی علامت بدلی ہوئی ہوتی ہین اور چوتہی رقم کا امثال برابر ہوتا ہی تین تین قیمتون کی حاصل ضربون کے مجموعہ کی مگر اونکی علامتین بدلی ہوئی
. . . اخیر رقم برابر ہوتی ہی تمام قیمتون کی حاصل ضرب کے مگر اونکی علامتین بدلی ہوئی

یا ہم ان قوانین کو اسطرح بیان کرتی ہین کہ امثال دوسری رقم کا جسکی علامت بدلی ہوئی ہی برابر تمام قیمتون کی مجموعہ کی اور امثال تیسری رقم کا برابر ہی دو دو قیمتون کے حاصل ضربون کی مجموعہ کی اور امثال چوتہی رقم کا جسکی علامت بدلی ہوئی ہو برابر ہوتا ہے تین تین قیمتون کے حاصل ضربون کی مجموعہ کی پس بالعموم اگر ع ر معمول کی موافق امثال $\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}$ کا مساوات مین ہو تو

$(-1)^{\text{ر}}\,\text{ع}_{\text{ر}}$ = ر قیمتون کے حاصل ضربون کے مجموعہ کے

(۴۶) شاید کسی کی دل مین یہہ خیال پیدا ہو کہ جو ارتباط اوپر بیان ہوئی ہین اونسے کسی مساوات مفروضہ کی قیمتین ہم کو معلوم ہو جائین کیونکہ اونسے مساواتین ایسی حاصل ہوتی ہین جنمین قیمتین مختلف ہوتی ہین اور تعداد ان مساواتون کی بہی اوتنی ہی ہوتی ہے جتنے کہ قیمتین ہین تو ان مساواتون مین سی سب قیمتون کو دور کرکے

ایک قیمت رہنی دین اور اوس ایک قیمت کو دریافت کر لین لیکن جب ہم اور قیمتون کو مساواتون سی دور کرتی ہین تو مساوات مفروضہ ہی جو ہم کو دوبارہ حاصل ہوجاتی ہے اسواسطے کچھہ فایدہ نہین ہوتا مثلاً مساوات

$$\text{لا}^3 + \text{ع}_1 \text{لا}^2 + \text{ع}_2 \text{لا} + \text{ع}_3 = 0 \quad \text{کے ہو}$$

اور اوسکے قیمتین ا ب و ج فرض کرو تو

$$-\text{ا} - \text{ب} - \text{ج} = \text{ع}_1$$

$$\text{اب} + \text{بج} + \text{ج ا} = \text{ع}_2$$

$$-\text{ا ب ج} = \text{ع}_3$$

اب ب اور ج کی دور کر کی ایک مساوات ایسی حاصل کرتے ہین کہ جسمین فقط ا ہی ہو تو اوسکی سب سے زیادہ آسان ترکیب یہہ ہے کہ ان تین مساواتون مین اول مساوات کو ا^2 مین ضرب دو اور دوسرے مساوات کو ا مین اور تیسرے مساوات کی ساتھہ حاصل کو جمع کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$-\text{ا}^3 - \text{ا}^2\text{ب} - \text{ا}^2\text{ج} + \text{ا}^2\text{ب} + \text{ابج} + \text{ج ا}^2 - \text{ابج} = \text{ع}_1 \text{ا}^2 + \text{ع}_2 \text{ا} + \text{ع}_3$$

$$\text{یعنی} \quad \text{ا}^3 + \text{ع}_1 \text{ا}^2 + \text{ع}_2 \text{ا} + \text{ع}_3 = 0$$

اب یہان مساوات جو حاصل ہوئی وہی ہی جو مساوات مفروضہ تہی فقط فرق اتنا ہی کہ لا کی جگہ ا ہی اور یہہ بات سمجھنی کچھہ مشکل نہین ہی کہ ارتباطات مذکورسی جب ہم نے ب اور ج کو دور کیا تو ایک مساوات تیسری درجہ ا کی حاصل ہوگئی ہم کو اسی مساوات کے حاصل ہونے کی توقع تہی کیونکہ حروف ا اور ب اور ج قیمتون کو تعبیر کرتی ہین اور اونمین باہم کچھہ تمیز نہین ہے اسلئی جو مساوات ا کی استخراج کرینگے اوسمین ا کی تین قیمتین ہونگین کیونکہ ا مساوات کی تینون قیمتون مین سی ہر یک قیمت ہوسکتا ہی پس اسی ہم کو خوب یقین ہوگیا کہ امثال مساوات اور اوسکی معلوم قیمتون مین جو ارتباطات باہمی ہونگی اون پر جو اعمال جبریہ اس نظر سی کیی جائینگی کہ اور قیمتین سوا ایک کے دور ہوجائینگی اونسی مساوات مفروضہ پیدا ہوگی

(۴۷) دفعہ ۴۵ مین جو ارتباطات بیان ہوئی گو اونسی قیمتین مساوات کی نہین دریافت ہو سکتین مگر اور بڑی بڑی نتایج اونسی مساوات کے باب مین مستنبط ہوتے ہین

مثلاً ا_1 و ا_2 ... ان قیمتین مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_1 \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ع}_2 \text{لا}^{\text{ن}-2} \cdots + \text{ع}_{\text{ن}-1}\text{لا} + \text{ع}_{\text{ن}} = 0$$ کی ہون

تو $$-\text{ع}_1 = \text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}$$

$$\text{ع}_2 = \text{ا}_1\text{ا}_2 + \text{ا}_1\text{ا}_3 + \cdots + \text{ا}_2\text{ا}_3 + \cdots$$

$$\text{ع}_1^2 - 2\text{ع}_2 = \text{ا}_1^2 + \text{ا}_2^2 + \text{ا}_3^2 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}^2$$

یعنی $\text{ع}_1^2 - 2\text{ع}_2$ برابر ہی مساوات مفروضہ کی قیمتون کی مجذورون کے مجموعہ کی پس اگر مساوات $\text{ع}_1^2 - 2\text{ع}_2$ منفی ہو تو تمام قیمتین مساوات کی اصلی نہین ہونگین

(۴۸) موافق دفعہ سابق کی اور ارتباطات بہی جنمین قیمتین ملتف ہون مستنبط کر سکتی ہین

مثلاً $(-1)^{\text{ن}-1}\text{ع}_{\text{ن}-1} =$ ن − ۱ قیمتون کے حاصل ضرب کے مجموعہ کے

$(-1)^{\text{ن}}\text{ع}_{\text{ن}} =$ تمام قیمتون کے حاصل ضرب

اسیواسطے تقسیم کرنے سے

$$-\frac{\text{ع}_{\text{ن}-1}}{\text{ع}_{\text{ن}}} = \frac{1}{\text{ا}_1} + \frac{1}{\text{ا}_2} + \cdots + \frac{1}{\text{ا}_{\text{ن}}}$$

= مجموعہ قیمتون متکافیہ یا مقلوبہ کے

اور نیز $$\text{ع}_1\frac{\text{ع}_{\text{ن}-1}}{\text{ع}_{\text{ن}}} = (\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}})\left(\frac{1}{\text{ا}_1} + \frac{1}{\text{ا}_2} + \cdots \frac{1}{\text{ا}_{\text{ن}}}\right)$$

$$= \text{ن} + \frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_2} + \frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_3} + \cdots + \frac{\text{ا}_2}{\text{ا}_1} + \frac{\text{ا}_2}{\text{ا}_3} + \cdots$$

اسیواسطے $$\frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_2} + \frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_3} + \cdots + \frac{\text{ا}_2}{\text{ا}_1} + \frac{\text{ا}_2}{\text{ا}_3} + \cdots = \frac{\text{ع}_1\text{ع}_{\text{ن}-1}}{\text{ع}_{\text{ن}}} - \text{ن}$$

باب چہارم تبدل ہئیت معادلات

(۴۹) عموماً مضمون اور مطلب اس باب کا یہہ ہی کہ مساوات معلوم سی ایک اور ایسی مساوات مستنبط کرین کہ جسکی قیمتین مساوات معلوم کی قیمتون سی ایک ارتباط خاص رکہتی ہون

جب آگے دیکھینگے تو یہہ معلوم ہوگا کہ بہت سی تبدیل ہیئت مساوات معلوم کی بغیر اوسکی قیمتون کے معلوم ہونے کی ہوسکتی ہین اور مثالون سے معلوم ہوگا کہ یہہ تبدیل ہیئت مساواتون کی حل کرنے مین کام آتی ہین

(۵۰) ایک مساوات کی ہیئت بدل کر دوسری مساوات ایسی بنا دو کہ اوسکی قیمتون کے علامت بدل جاے

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات ہی اور ی = - لا کے ایسا مقرر کرو کہ

جب لا کی کوئی خاص قیمت ہو تو ی کی وہی قیمت تعدادا ہو مگر علامت اوسکی متضاد ہو

پس لا = - ی اور مساوات مطلوب ج (-ی) = ۰ کے ہے

اگر

$$\text{ج}(\text{لا}) = \text{ع}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ع}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}-1}\,\text{لا} + \text{ع}_{\text{ن}}$$

مساوات ج (-ی) = ۰

$$\text{ع}(-\text{ی})^{\text{ن}} + \text{ع}_1(-\text{ی})^{\text{ن}-1} + \text{ع}_2(-\text{ی})^{\text{ن}-2} + \cdots - \text{ع}_{\text{ن}-1}\,\text{ی} + \text{ع}_{\text{ن}} = 0$$

یعنی

$$\text{ع}\,\text{ی}^{\text{ن}} - \text{ع}_1\,\text{ی}^{\text{ن}-1} + \text{ع}_2\,\text{ی}^{\text{ن}-2} + \cdots \mp \text{ع}_{\text{ن}-1}\,\text{ی} \pm \text{ع}_{\text{ن}} = 0$$

پس اسی معلوم ہوا کہ مساوات معلومہ کے ہیئت کو اگر اسطرح بدلین کہ دوسری رقم سی شروع کرکے ہر یک رقم کی علامت کو بدل دین تو مساوات مطلوب حاصل ہوجائیگی

(۵۱) دفعہ گذشتہ کی آخر مین جو قاعدہ بیان ہوا ہی اوسمین مساوات مفروضہ کی اندر تمام رقمین وہ فرض کی گئین ہین جو اوس درجہ کی مساوات مین واقع ہوا کرتی ہین یعنی کسی مثال کو صفر نہین فرض کیا اب اگر کوئی ایسی مثال ہو کہ جسمین یہہ بات نہ پائی جائی مثلاً یہہ مساوات ہو کہ

$$\text{لا}^6 + 3\,\text{لا}^5 - 4\,\text{لا}^3 - 4\,\text{لا} + 7 = 0$$

اسکو ایسی مساوات مین تبدیل کرنا ہو کہ جسکی قیمتین باعتبار کمیت کی تو وہی ہون جو اس مساوات کی قیمتین ہین مگر علامتین اونکے متضاد ہوویں

لا = - ی کی رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ی}^6 - 3\,\text{ی}^5 + 4\,\text{ی}^3 + 4\,\text{ی} + 7 = 0$$

اگر ہم چاہین تو اصل مساوات کو اسطرح لکھین کہ

$$\text{لا}^6 + 3\,\text{لا}^5 + 0 \times \text{لا}^4 - 4\,\text{لا}^3 + 0 \times \text{لا}^2 - 4\,\text{لا} + 7 = 0$$

تو بموجب قاعدہ دفعہ ۵۰ کے مساوات کے ہیئت بدل کر یہہ مساوات حاصل ہوگی کہ

$$ی^{۶} - ۳ی^{۵} + ۰ \times ی^{۴} + ۴ی^{۳} + ۰ \times ی^{۲} + ۴ی + ۶ = ۰$$

یعنی $$ی^{۶} - ۳ی^{۵} + ۴ی^{۳} + ۴ی + ۶ = ۰$$

اور یہی مساوات سابق میں حاصل ہوئی تھی

مساوات میں جب وہ سب رقمیں واقع ہوں جو اوس درجہ کی مساوات میں واقع ہوتی ہیں یعنی کوئی امثال صفر نہ ہو تو ہم اوسکو مساوات کامل کہتے ہیں اور کبھی کبھی اسی ہی کام بہت نکلتا ہی کہ مساوات کو کامل موافق حکمت مذکورہ کی بنالیں یعنی جو رقمیں نہوں اونکو لکھدیں اور امثال اونمیں سے ہر ایک کی صفر بنائیں

(۵۲) ایک مساوات کی ہیئت بدلکے دوسری مساوات ایسی بناؤ کہ جسکی قیمتیں مساوات مفروض کے قیمتوں سے کچھہ خاص گنی ہو یعنی خاص اضعاف ہوں یا اجزا

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات مفروضہ ہی اور مطلوب یہہ ہی کہ اس مساوات کی ہیئت بدل کر دوسرے مساوات ایسی بنائیں کہ جسکی قیمتیں ک گنی مساوات مفروضہ کی قیمتوں سی ہو

ی = ک لا کے مقرر کرو جب لا کی کوئی خاص قیمت ہو تو ی کی قیمت ک گنی ہوگی

بس $لا = \frac{ی}{ک}$ اور مساوات مطلوب $ج(\frac{ی}{ک})$ ہے

(۵۳) مثلاً اس مساوات

$$لا^{۳} - \frac{۳لا^{۲}}{۲} + \frac{۵لا}{۴} - \frac{۲}{۹} = ۰$$ کی

ہیئت بدل کر دوسرے مساوات بناؤ جسکی قیمتیں ک گنی ہوں $لا = \frac{ی}{ک}$ کے رکھو اور پہر $ک^{۳}$ میں سب کو ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ی^{۳} - \frac{۳ک ی^{۲}}{۲} + \frac{۵ک^{۲} ی}{۴} - \frac{۲ک^{۳}}{۹} = ۰$$

اس مثال سی ہم بتلائینگے کہ اس تبدل ہیئت کو کن کام میں لاسکتی ہیں مساوات مفروضہ میں سب امثال صحیح نہیں ہیں تو ہم ک کی مناسب قیمت فرض کرکے مساوات کی ایسی ہیئت بدل کر دوسری مساوات پیدا کرسکتی ہیں کہ جسمیں سب امثال صحیح اعداد ہوں

مثلاً ک = ۲ کے فرض کرو تو مساوات بدل کر

ی۳ − ۹ ی۲ + ۴۵ ی − ۸۴ = ۰ ہو جائینگے۔

عموماً یہہ فرض کرو کہ مساوات

لان + ع۱ لان−۱ + ع۲ لان−۲ + ۰۰۰ + عن−۱ لا + عن = ۰ ہو

اب اگر ہم لا = ی/ک کی فرض کرین اور سب کو کن مین ضرب دین تو جو مساوات اسطرح پیدا ہوگی اوسمین تمام امثال کی صحیح اعداد ہونی کی واسطی فقط اس بات کا تحقیق کرنا ضرور ہی کہ ہر ایک رقم عر کر ین−ر کی واسطی ہر ایک جز ضربی اوسکے نہائیں جو عر کی نسبتاً مین واقع ہو کم از کم اوسکی اعلیٰ قوت کر مین واقع ہو

(۵۴) ایک مساوات کی ہیئت بدل کر دوسری مساوات ایسی پیدا کرو کہ اوسکی قیمتیں مساوات مفروض کے قیمتوں سی بقدر ایک مقدار مستقل کی جداگانہ کم ہون

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات مفروضہ ہو اور یہہ مطلوب ہی کہ اس مساوات کی ہیئت بدل کر دوسری مساوات ایسی پیدا کرین کہ اوسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کی قیمتوں سی بقدر مقدار مستقل ک کے کم ہون ی = لا − ک کی ایسا مقرر کرو کہ جب لا کی کوئی خاص قیمت لین تو قیمت ی کی اوسی بقدر ک کی کم ہو لا = ک + ی اور مساوات مطلوب ج (ک + ی) = ۰ ہے

بموجب دفعہ ۱۰ کے مساوات (ک + ی) = ۰ کو پھیلاؤ تو

ج (ک) + ی جً (ک) + (ی۲ / ۲×۱) جً (ک) + (ی۳ / ۳!) جً (ک) + ۰۰۰ + ین (جن (ک) / ن!) = ۰

پس اگر ج (لا) = ع۰ لان + ع۱ لان−۱ + ع۲ لان−۲ + ۰۰۰ + عن−۱ لا + عن

مساوات ج (ک + ی) = ۰ کو موافق قواء متنازلہ ی کی بموجب دفعہ ۱۲ کی مرتب کرین تو

ع۰ ین + (ع۱ + ن ع۰ ک) ین−۱ + [ع۲ + (ن − ۱) ع۱ ک + (ن (ن − ۱) / ۲×۱) ع۰ ک۲] ین−۲
+ [عر + (ن − ر + ۱) عر−۱ ک + ۰۰۰۰ + (ن (ن − ۱) ۰۰۰ (ن − ر + ۱) / ر!) ع۰ کر] ین−ر
+ ۰۰۰ + ج (ک) = ۰

(۵۵) اگر ایک مساوات کی ہیئت بدل کر دوسری مساوات ایسی پیدا کرنی ہو کہ جسکی قیمتین مساوات

مفروضہ کی قیمتوں سی بقدر ایک مقدار مستقل ھ کی زیادہ ہوں تو ہم کو ترکیب سابق پر عمل کرنا چاہیے
فرض کرو کہ مساوات $ج(لا) = 0$ سی تعبیر ہو اور $ی = لا + ھ$ کے فرض کرو تو
$لا = ی - ھ$ اور مساوات مطلوب $ج(ی - ھ) = 0$ اب دفعہ گذشتہ کی نتیجہ مین $-ھ$ بجای ک کی رکھو تو مساوات مطلوب حاصل ہوجائیگی اگر غور سی خیال کرو تو یہہ بات دفعہ گذشتہ کی بیان مین ضمناً ثابت ہوگی اسلیئے کہ اس دفعہ مین یہہ کچھہ ضرور نہین کہ ک قطعی مثبت مقدار رہے ہو

(۵۶) دفعہ ۵۴ مین جس تبدل ہیئت کو ہم نی حاصل کیا ہی اوسکا بڑا فائدہ یہہ ہی کہ ایک مساوات مفروضہ مین سی جس رقم کو ہم تعین کرین معدوم ہوجاسے
مثلاً اگر بدلی ہوئی مساوات مین دوسرے رقم کو معدوم کرنا چاہین تو ہم ک کو ایسا مقرر کرتی ہین کہ $ع_1 + ن ع_0 ک = 0$

یعنی $ک = -\frac{ع_1}{ن ع_0}$ ہو اور اگر ہم یہہ چاہین کہ بدلی ہوئی مساوات ی مین تیسری رقم نہ رہی تو ہم ک کو اس دوسرے درجہ کی مساوات سے دریافت کرین کہ

$$ع_2 + (ن-1) ع_1 ک + \frac{ن(ن-1)}{1 \times 2} ع_0 ک^2 = 0$$

اب بالعموم یہہ ہی کہ بدلی ہوئی مساوات ی مین (ر+۱) وین رقم نہ رہی
تو ہم ک کو اس ر درجہ کی مساوات سے دریافت کرین کہ

$$ع_0 ک^ر + \frac{ر}{ن} ع_1 ک^{ر-1} + \frac{ر(ر-1)}{ن(ن-1)} ع_2 ک^{ر-2} + \cdots + \frac{|ر \, |ن-ر}{|ن} ع_ر = 0$$

اب ہم آگی بیان کرینگے کہ مساواتون کی حل کرنی مین بڑی آسانی کسی خاص رقم کی اڑا دینی سی ہوجاتی ہے

(۵۷) مثلاً مساوات $لا^3 - 6لا^2 + 4لا + 5 = 0$ کی ہیئت بدل کر ایسی مساوات پیدا کرو کہ اوسمین دوسری رقم نہ ہو یہان $ع_0 = 1$ اور $ع_1 = -6$ پس $ک = 2$ اور مساوات مطلوب

$$(ی+2)^3 - 6(ی+2)^2 + 4(ی+2) + 5 = 0$$

یعنی $ی^3 - 8ی - 3 = 0$

اب یہہ اس مساوات $لا^3 - 3لا^2 - 4لا + 9 = 0$ کی ہیئت بدل کر ایک اور مساوات ایسی پیدا کرو

کہ اوسمین تیسرے رقم نہ ہو ی + ک کو بجای لا کے رکہو تو ہیئت بدلی ہوئی مساوات یہہ ہوگی

$$(ی+ک)^{۳} - ۲(ی+ک)^{۲} - ۴(ی+ک) + ۹ = ۰$$

یعنی $ی^{۳} + ی^{۲}(۳ک - ۲) + ی(۳ک^{۲} - ۴ک - ۴) + ک^{۳} - ۲ک^{۲} - ۴ک + ۹ = ۰$

یعنی اگر تیسرے رقم اڑانی منظور ہو تو مساوات $۳ک^{۲} - ۴ک - ۴ = ۰$ سے ک کو دریافت کرو

تو $ک = ۲$ یا $-\frac{۲}{۳}$ کی حاصل ہوگا $ک = ۲$ کی قیمت کی موافق بدلی ہوئی مساوات یہہ ہوگی کہ

$$ی^{۳} + ۴ی^{۲} + ۱ = ۰$$

اور موافق قیمت $ک = -\frac{۲}{۳}$ کے ہیئت بدلی ہوئی مساوات

$$ی^{۳} - ۴ی^{۲} + \frac{۲۸۳}{۲۷} = ۰$$

(۵۸) ایک مساوات کی ہیئت بدل کر ایک اور مساوات ایسی پیدا کرو کہ جسکی قیمتیں متکافی مساوات مفروضہ کے قیمتوں کے جداگانہ ہوں

فرض کرو کہ $ج(لا) = ۰$ مساوات مفروضہ ہو $ی = \frac{۱}{لا}$ کی ایسا مقرر کرو کہ جب لا کی کوئی خاص قیمت معین ہو تو قیمت ی کی متکافی اوس قیمت کی ہو پس $لا = \frac{۱}{ی}$ اور مساوات مطلوب $ج(\frac{۱}{ی}) = ۰$ ہے

پس اگر $ج(لا) = ع_{.}لا^{ن} + ع_{۱}لا^{ن-۱} + ع_{۲}لا^{ن-۲} + \cdots + ع_{ن-۱}لا + ع_{ن}$

تو مساوات $ج(\frac{۱}{ی}) = ۰$ یہہ ہوگی کہ

$$\frac{ع_{.}}{ی^{ن}} + \frac{ع_{۱}}{ی^{ن-۱}} + \frac{ع_{۲}}{ی^{ن-۲}} + \cdots + \frac{ع_{ن-۱}}{ی} + ع_{ن} = ۰$$

یعنی $ع_{ن}ی^{ن} + ع_{ن-۱}ی^{ن-۱} + ع_{ن-۲}ی^{ن-۲} + \cdots + ع_{۱}ی + ع_{.} = ۰$

(۵۹) ایک مساوات کی ہیئت بدل کر ایک اور مساوات ایسی پیدا کرو کہ جسکی قیمتیں مجذور مساوات مفروضہ کی ہر ایک قیمتوں کے جداگانہ ہوں

فرض کرو کہ $ج(لا) = ۰$ مساوات کو تعبیر کرے اور $ی = لا^{۲}$ کی ایسا مقرر کرو کہ جب لا کی کوئی خاص قیمت مقرر کیجائے تو ی کی قیمت اوسکا مجذور ہو پس $لا = \sqrt{ی}$ اور مساوات مطلوب $ج(\sqrt{ی}) = ۰$ ہے

پس اگر $ج(لا) = ع_{.}لا^{ن} + ع_{۱}لا^{ن-۱} + ع_{۲}لا^{ن-۲} + \cdots + ع_{ن-۱}لا + ع_{ن}$

تو مساوات ج (لا ی) = ۰ یہہ ہوگی کہ

ع. ی^(ن/۲) + ع۱ ی^((ن−۱)/۲) + ع۲ ی^((ن−۲)/۲) + ... + ع ن−۱ ی^(۱/۲) + ع ن = ۰

انتقال اور مجذور سے ہم کو یہہ حاصل ہوگا

(ع. ی^(ن/۲) + ع۲ ی^((ن−۲)/۲) + ع۴ ی^((ن−۴)/۲) + ...)^۲ = (ع۱ ی^((ن−۱)/۲) + ع۳ ی^((ن−۳)/۲) + ...)^۲

جب طرفین مساوات کو تشریحاً لکھینگے تو وہ صورت منطق پیدا کرینگے اور جب سب رقموں کو ایک طرف لے ائینگے تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ع.^۲ ی^ن + (۲ع. ع۲ − ع۱^۲) ی^(ن−۱) + (۲ع. ع۴ + ع۲^۲ − ۲ع۱ ع۳) ی^(ن−۲) + ... = ۰

(۴۰) مساوات کی تبدل ہیئت کی اور بہت سی صورتین ہوسکتی ہین مگر ہم نے اوسیقدر لکھی ہین جسقدر کہ اس مطلب کے سمجھنے کی لئی کافی ہین دفعہ ۴۵ مین جس ارتباط کا بیان ہوا ہی اونکی توضیح کے واسطی دو مثالین لکھکر اس بات کو ختم کرتے ہین

(۱) مساوات لا^۳ + ق لا + ر = ۰ کی ہیئت بدل کر ایسی مساوات پیدا کرو کہ جسکی قیمتین مجذور مساوات مفروضہ کے قیمتون کے تفاوت کا ہو

فرض کرو کہ ا اور ب اور ح قیمتین مساوات کی ہون تو بموجب دفعہ ۴۵ کے

ا + ب + ح = ۰ ، اب + ب ح + ح ا = ق ، ا ب ج = − ر

اسیواسطے ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ = −۲ق

اور ہیئت بدلی ہوئی مساوات کی قیمتین (ا − ب)^۲ اور (ب − ح)^۲ اور (ا − ح)^۲ ہین

اب (ا − ب)^۲ = ا^۲ − ۲اب + ب^۲ = ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ − ۲اب − ح^۲ =

ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ − ۲ا ب ج / ح − ح^۲

= −۲ق + ۲ر/ح − ح^۲

پس اگر ی = −۲ق + ۲ر/لا − لا^۲ اوس حالت مین کہ لا کی قیمت ح ہو تو قیمت ی کی (ا − ب)^۲ ہوگی اور علی ہذا القیاس جب لا کی قیمتین ا اور ب ہون

تو قیمتین ء کی (ب – ح)^{۲} اور (ح – ا)^{۲} ہوگی پس ہیئت بدلی ہوئی مساوات
مساوات مفروضہ اور مساوات ء = – ۲ق + ۳ر/لا – لا^{۲} سے لا کی دور کرنی سی حاصل ہوگی
اور یہہ لا دور اسطرح ہوگا کہ

لا^{۳} + ق لا + ر = ۰

اور لا^{۳} + (۲ق + ء) لا – ۲ر = ۰

اسیواسطے (ق + ء) لا – ۳ر = ۰

پس لا = ۳ر/(ق + ء) مساوات مفروضہ مین اس قیمت کو مندرج کرو تو اخر کا یہہ مساوات حاصل ہوگی کہ

ء^{۳} + ۶ق ء^{۲} + ۹ق^{۲}ء + ۲۷ر^{۲} + ۴ق^{۳} = ۰

اسی معلوم ہوتا ہی کہ اگر ۲۷ر^{۲} + ۴ق^{۳} مثبت ہو تو بموجب دفعہ ۲۰ کے ہیئت بدلی ہوئی
مساوات کی قیمت ایک اصلی منفی ہوگی اور اسیواسطے مساوات مفروضہ کی دو خیالی قیمتین
ہونگین کیونکہ یہی ایک زوج قیمتون کا ہوگا تو
ہیئت بدلی ہوئی مساوات کی ایک منفی قیمت پیدا کرے
اگر ۲۷ر^{۲} + ۴ق^{۳} صفر ہو تو ہیئت بدلی ہوئی مساوات کی ایک قیمت صفر ہوگی اور اسیواسطے
مساوات مفروضہ کی دو برابر قیمتین ہونگین

(۲) مساوات لا^{۳} + ع لا^{۲} + ق لا + ر = ۰ کی ہیئت بدل کر ایسی مساوات پیدا کرو کہ
جسکی قیمتین مجذور مساوات مفروضہ کی قیمتون کی تفاوت کا ہو

لا = لاَ – ع/۳ رکھو تو مساوات مفروضہ ہوجائیگی کہ

(لاَ – ع/۳)^{۳} + ع (لاَ – ع/۳)^{۲} + ق (لاَ – ع/۳) + ر = ۰

یعنی لاَ^{۳} + قَ لاَ + رَ = ۰

اسمین قَ = ق – ع^{۲}/۳ رَ = ۲ع^{۳}/۲۷ – ع ق/۳ + ر

اخر مساوات کی ہریک قیمت مساوات مفروضہ کی ہریک قیمت سے موافق نظیر کی بقدر ع/۳ کی زیادہ

اسواسطے اخیر مساوات کی قیمتوں کے مجذوروں کا تفاوت وہی ہوگا جو مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی مجذوروں کا تفاوت ہی اور موافق مثال گذشتہ کی مساوات مطلوب یہہ ہی کہ

$$\text{ی}^{۳} + ۶\,\text{ق}\,\text{ی}^{۲} + ۹\,\text{ق}^{۲}\,\text{ی} + ۲۷\,\text{ر}^{۲} + ۴\,\text{ق}^{۳} = ۰$$

یعنی $$\text{ی}^{۳} + ۲(۳\text{ق} - \text{ع}^{۲})\,\text{ی}^{۲} + (۳\text{ق} - \text{ع}^{۲})^{۲}\,\text{ی} + \frac{(۲\text{ع}^{۳} - ۹\text{ع}\,\text{ق} + ۲۷\text{ر})^{۲} + ۴(۳\text{ق} - \text{ع}^{۲})^{۳}}{۲۷} = ۰$$

باب پنجم ڈس کارٹیس کا قاعدہ علامات کا

(۶۱) دفعات ۲۱ — ۴۴ مین ہم نے مثالین ایسی بیان کین ہین کہ جنسے ج (لا) کے امثال کی تعلقات باہمی اور مساوات ج (لا) = ۰ کی قیمتون کی صفت ذاتی معلوم ہوتی ہی اب ہم اول چند حدود بیان کرینگی اور بعد ازان مسائل عامہ کی تحقیقات لکھینگے

(۶۲) اگر ایک سلسلہ رقام کی ہو اور ہر یک رقم کی اول علامات + اور − سے کوئی ایک ہو تو مقادیر کے بالترتیب خیال کرنے مین جب ایک رقم کی وہی علامت ہو جو اوسکی رقم ماقبل کی علامت ہی تو اوسکو تواتر کہینگے اور جب ایک رقم کی علامت اپنی رقم ماقبل کی علامت سی مخالف ہو تو اوسکو تغیر کہینگے مثلاً جملہ $\text{لا}^{۸} - ۳\,\text{لا}^{۷} - ۴\,\text{لا}^{۶} + ۷\,\text{لا}^{۵} + ۳\,\text{لا}^{۴} + ۲\,\text{لا}^{۳} - \text{لا}^{۲} - \text{لا} + ۱$ مین چار تواتر اور چار تغیر ہین اول تواتر $-۴\,\text{لا}^{۶}$ پر دوسرا تواتر $+۳\,\text{لا}^{۴}$ پر اور تیسرا تواتر $+۲\,\text{لا}^{۳}$ پر ہے اور چوتھا $-\text{لا}$ پر اور اول تغیر $-۳\,\text{لا}^{۷}$ اور دوسرا $+۷\,\text{لا}^{۵}$ پر اور تیسرا $-\text{لا}^{۲}$ پر اور چوتھا $+۱$ پر واقع ہوتا ہے

یہہ ظاہر ہی کہ جب مساوات کامل ہو تو اوسکی مجموعہ تواتر اور تغیر کی تعدادون کا اوس عدد کی برابر ہوگا جو مساوات کا درجہ تبلا رہا ہی دفعہ ۱۵ دیکھو

اور اگر ہم کسی مساوات کامل مین − لا بجای لا کی رکھہ دین تو نئی مساوات مین اصلی مساوات کی تغیر تواتر ہوجائینگے اور تواتر تغیر ہوجائینگے مساوات ج (لا) = ۰ مین جو کامل نہ ہو ج (لا) اور ج (− لا) کی تغیرات کی تعدادون کا مجموعہ ایسا عدد نہیں ہوگا کہ مساوات کی درجہ سے زیادہ ہوجاے وجہ اسکی یہہ ہی کہ جب ج (لا) مین بعض ارقام معدوم ہون تو یہہ ممکن ہے کہ ج (لا) اور ج (− لا) کے تغیرات کی تعداد کم ہوجاے مگر اوسکا زیادہ ہونا ناممکن ہے

اب ہم ایک مسئلہ کا بیان کرتی ہین اورا وسکو ثابت بہی کرتی ہین اوسکو ڈس کارٹیس کا قاعدہ علامات کہتے ہین

(۴۳) کسی مساوات مین خواہ وہ کامل ہو یا ناکامل تعداد مثبت قیمتون کی امثال کی تغیرات علامات کی تعداد سی زیادہ نہین ہو سکتی اور کسی مساوات کامل مین تعداد منفی قیمتون کی امثال کی توا تر علامات کی تعداد سی زیادہ نہین ہو سکتی

اول ہم ثابت کرینگے کہ کسی کثیر الارقام جملہ کو ہم جز ضربی لا - ا مین ضرب دین تو کم از کم حاصل ضرب مین ایک تغیر علامت بہ نسبت اصلی جملہ کے زیادہ ہوجا ئیگا

مثلاً فرض کرو کہ ایک اصلی جملہ کثیر الارقام کی علامات ++−−−+−−+−−−+ ہین اور اس کثیر الارقام کو جملہ ثنائی مین ضرب دیتا ہو اور اوسکی علامتین + − ہین اب اگر ان علامتون کو لکہکر عمل ضرب کا کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

```
+ − − + − + − − − + +
                  − +
----------------------
+ − − + − + − − − + +
+ + − + − + + + − − −
----------------------
− + ∓ − + − + ∓ ∓ − ± +
```

دوہری علامت وہان لکہی جہان کہ حاصل ضرب مین علامت کی اندر اشتباہ تہا

اب یہان یہہ قوائین نظر اتے ہین

(۱) اصلی کثیر الارقام میں ایک تواتر کی مقابل مین جدید کثیر الارقام مین سلک علامت مشتبہ کی واقع ہے اور دونون مین تعداد علامات کی یکسان ہے

(۲) جدید کثیر الارقام مین علامت مشتبہ کی ما قبل اور ما بعد کی علامات مین تضاد ہے

(۳) کثیر الارقام جدید مین اخر مین ایک تغیر زیادہ ہو گیا ہے

اب کثیر الارقام جدید مین ایک صورت ایسی لو کہ وہ سب سے زیادہ مخالف معلوم ہوتی ہو اور تمام علامات مشتبہ کی جگہ تواترات کو رکہو تو بموجب قانون دوم کی تواتر کی تعداد مین کچہہ فرق اسی نہین پڑ لگا علامات مشتبہ کی ہم اوپر کی علامت لین تو اصلی کثیر الارقام کی علامتین کثیر الارقام جدید مین مکرر

اسکی بموجب تیسری قانون کی ایک تغیر علامات کا کثیر الارقام جدید کا آخر مین زیادہ داخل ہوجایگا
پس جب ایسی صورت مخالف مین ایک تغیر علامت کا کثیر الارقام جدید مین بہ نسبت اصلی کثیر الارقام کے
زیادہ ہوگیا تو اور صورتون مین کیون نہ ہوگا

اب اگر ہم یہہ فرض کرین کہ ایک مساوات کی منفی اور خیالی قیمتون کے موافق اجزاء ضربی کی حاصل ضرب کو
ایک مثبت قیمت کی مطابق جزء ضربی مین ضرب دین تو کم از کم ایک تغیر علامت کا اوسمین داخل ہوجایگا
اسواسطے کسی مساوات مین تغیرات علامت کی تعداد سی زیادہ مثبت قیمتون کی تعداد نہین ہوسکتی
اب ڈس کارٹیس کے قاعدہ علامات کا دوسرا جزو ثابت کرتی ہین فرض کرو کہ مساوات کامل ہے
تو بجای لا کی - لا رکہنی سی ہئیت مساوات کی ایسی بدل جائیگی کہ اصل توالی تغیر علامات اوسمین
بنجائیگی اور اب اس بدلی ہوئی مساوات کی مثبت قیمتین بہ نسبت تغیرات کی زیادہ نہین ہوسکتین
اور اسکی یہہ معنی ہین کہ اصلی مساوات کی منفی قیمتون کی تعداد اوسکی تواتر علامت کی تعداد سی زیادہ نہین ہوسکتی

(۶۴) خواہ مساوات ج (لا) = ۰ کامل ہو یا نہ ہو اوسکی قیمتین بلحاظ کمیت کے برابر مساوات
ج (- لا) = ۰ کے قیمتون کی ہوتی ہین مگر علامت مین مخالف یعنی منفی قیمتین
ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتین ج (- لا) = ۰ کی ہوتی ہین خواہ مساوات کامل ہو یا نہ ہو
ج (- لا) = ۰ کی مثبت قیمتون کی تعداد ج (- لا) کے تغیرات علامت کی تعداد
سی زیادہ نہین ہوسکتی پس کل قاعدہ علامات کا اسطرح مختصر بیان ہوسکتا ہے کہ
ایک مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتین تعداد مین ج (لا) کے تغیرات علامت
کی تعداد سی زیادہ نہین ہوسکتی اور اوسکی منفی قیمتون کی تعداد ج (- لا) کی تغیرات علامت
کی تعداد سی زیادہ نہین ہوسکتی

(۶۵) مثلاً مساوات $لا^۴ + ۳ لا^۲ + ۵ لا - ۷ = ۰$ ہو یہان ایک تغیر علامت ہے اسواسطے ایک مثبت قیمت
سی زیادہ مثبت قیمتین نہین ہوسکتین اور لا کی جگہ - لا لکہو تو یہہ مساوات
$لا^۴ + ۳ لا^۲ - ۵ لا - ۷ = ۰$ کی حاصل ہوئی اسمین ایک تغیر علامت کا ہی اسلیئے اوسکی ایک

ایک مثبت قیمت سی زیادہ کوئی اور مثبت قیمت نہین ہوسکتی اسواسطے اصلی مساوات کی کوئی منفی قیمت ایک سی زیادہ نہین ہوسکتی پس اصلی مساوات کی دو تحقیقی قیمتون سی زیادہ قیمتین نہین ہوسکتین

اس مثال مین بموجب دفعہ ۲۱ کی ہم کو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ایک مثبت قیمت ہی اور ایک منفی قیمت ہے اور یہی ہم نی ابہی تحقیق کرکی لکھا ہی کہ ایک سی زیادہ ہر یک قیمت نہین ہوسکتی

اب پہر مساوات $لا^{۳} + ق\,لا + ر = ۰$ پر خیال کرو اور اوسمین ق اور ر دونو مثبت ہین

اب یہان کوئی تغیر علامت نہین ہی اسواسطی اوسکی کوئی مثبت قیمت نہین ہی اور یہہ بات دفعہ ۲۴ کی موافق یہی ظاہر ہی اور اگر ہم لا کی جگہہ - لا لکہین تو مساوات مین ایک تغیر علامت کا ہوگا تو اصلی مساوات کی ایک منفی قیمت سی زیادہ کوئی منفی قیمت نہین ہوسکتی اسلئی اصلی مساوات کی دو خیالی قیمتین ہین

اب پہر مساوات $لا^{۳} - ق\,لا + ر = ۰$ پر خیال کرو اور اسمین ق اور ر دونو مثبت ہین

اب یہان دو تغیر علامت کی ہین اسلئی اوسکی دو مثبت قیمتون سی زیادہ قیمتین نہین ہوسکتین اور اگر لا کی جگہ - لا لکہین تو مساوات ایسی حاصل ہوگی کہ اوسمین ایک تغیر علامت ہوگا پس اصلی مساوات کی ایک منفی قیمت سی زیادہ کوئی منفی قیمت نہین ہوسکتی

اس مثال مین بموجب دفعہ ۲۰ کی ہم اس بات کو جانتی ہین کہ ایک منفی قیمت اوسکی ہے اور یہہ اب ہم نی تحقیق کرکی لکھا ہی کہ ایک سی زیادہ منفی قیمت نہین ہوسکتی اور باقی دو قیمتین تحقیقی مثبت مقادیر ہین یا خیالی مقادیر ہین اسکو ہم ڈس کارٹس کے قاعدہ علامات سی نہین دریافت کرسکتے لیکن بموجب دفعہ ۶۰ کی یہہ نتیجہ پیدا ہوتا ہی کہ مساوات جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کے قیمتون کی مجذورون کی تفاضل کی برابر ہون یہہ ہی کہ $ی^{۳} - ۶ق\,ی^{۲} + ۹ق^{۲}\,ی + ۲۷ر^{۲} - ۴ق^{۳} = ۰$

اور ڈس کارٹس کے قاعدہ علامات اور دفعہ ۲۴ کی موافق اگر $۲۷ر^{۲} - ۴ق^{۳}$ منفی ہے تو اخیر مساوات کی کوئی قیمت منفی نہین ہوگی اور اسیواسطے اصلی مساوات کی کوئی قیمت خیالی نہین ہوگی اور اگر $۲۷ر^{۲} - ۴ق^{۳}$ مثبت ہی تو اخیر مساوات کی بموجب دفعہ ۲۰ کے کوئی منفی قیمت نہین ہونی کی

اسواسطے اصلی مساوات کی دو خیالی قیمتین ہونگین

(۶۶) طالب علم کو اس بات پر غور کرنی چاہیئی کہ دفعہ ۲۴ مین جو نتایج لکھی ہین وہ بالکل ڈس کارٹس کے قاعدہ علامات کی مطابق ہین اور اوسی سے سب مستنبط ہوسکتی ہین اور دفعہ ۲۲ مین جو دعوی ثابت کیا ہے وہ بہی قاعدہ ڈس کارٹیس مین داخل ہی اور ہم کو اس قاعدہ سی یہہ بات بہی معلوم ہوتی ہے کہ دفعہ ۲۲ مین جس مساوات پر بحث ہوئی ہی اوسکی ایک مثبت قیمت سی زیادہ مثبت قیمتین ہوسکتی ہین خواہ برابر ہون خواہ نا برابر

(۶۷) ڈس کارٹس کے قاعدہ علامات مین یہہ ثابت ہوا ہی کہ کثیر الارقام کو ایک جز ضربی مین جو موافق ایک تحقیقی مثبت قیمت کی ہو ضرب دینی سی کم از کم ایک تغیر علامت داخل ہوسکتا ہے اب یہہ بیان کیا جاتا ہی کہ تغیرات علامات کی جو داخل کیجاتی ہین تعداد مین طاق ہوتی ہین اسواسطے کہ اول فرض کرو کہ اصلی کثیر الارقام مین اخر علامت + ہی تو کل تعداد تغیرات علامت کی اصلی کثیر الارقام مین جفت یا صفر ہونی چاہیی اور کثیر الارقام جدید مین اخر علامت − ہی تو تعداد تغیرات علامت کی طاق ہونی چاہیی اسی معلوم ہوتا ہی کہ تغیرات علامت جو داخل کیگئی ہین وہ طاق ہین جفت کا طاق جب ہی بنتا ہی کہ طاق زیادہ ہو

دوم فرض کرو کہ اخر علامت اصلی کثیر الارقام مین − ہی تو کثیر الارقام جدید مین اخر علامت + ہوگی تو اصلی کثیر الارقام مین تعداد تغیرات علامت کی طاق ہوگی اور کثیر الارقام جدید مین تعداد تغیرات علامت کی جفت ہوگی اسواسطے تغیرات جو داخل کیگئی ہین اونکی تعداد طاق ہوگی

(۶۸) اگر سب قیمتین مساوات ج (لا) = ۰ کی تحقیقی ہون تو تعداد مثبت قیمتون کی برابر ج (لا) کی تغیرات علامت کی تعداد کی ہی اور تعداد منفی قیمتون کی برابر ج (− لا) کے تغیرات علامت کی تعداد کے ہے

فرض کرو کہ مساوات ن درجہ کی ہی اور م تعداد مثبت قیمتون کی ہی اور مَ تعداد منفی قیمتون کی اور مو تعداد تغیرات علامت ج (لا) کی

اور مو تعداد تغیرات علامت ج (−لا) کی چونکہ تمام قیمتین مساوات کی تحقیقی ہین اسلئی م + مَ = ن اور م زیادہ مو سی اور مَ زیادہ مَو سی بموجب دفعہ ۱۴۳ کے نہین ہو سکتی اسیواسطے مو + مَو = ن اسواسطی کہ مجموعہ مو اور مَو کا زیادہ ن سی نہین ہو سکتا

پس م + مَ = مو + مَو اور + م نہ زیادہ مو سی ہو سکتا ہی اور نہ کم مو سی ہو سکتا ہے اسلئی کہ اگر کم ہو تو مَ بڑا مَو سی ہوتا ہی اور یہہ ناممکن پس م = مو اور مَ = مَو

(۶) فرض کرو کہ مو تعداد تغیرات علامت ج (لا) کی ہو اور مَو تعداد تغیرات علامت ج (−لا) کے ہون تو مساوات ج (لا) = ۰ کی مو مثبت قیمتون سی زیادہ قیمتین نہین ہو سکتی اور مَو سی زیادہ منفی قیمتین نہین ہو سکتی اور اسواسطے مو + مَو سی تحقیقی قیمتین زیادہ نہین ہو سکتین اسی معلوم ہوا کہ اگر ن زیادہ مو + مَو سی ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کے کم از کم ن − مو − مَو خیالی قیمتین ہونگین دو دفعات ابعد مین ہم بہت توضیح کے ساتھہ اس بات کو بتلائینگے کہ جب مساوات کامل نہ ہو تو اوسکی خیالی قیمتون کی تعداد کیا ہوتی ہے

(۷) اگر کسی مساوات مین ایک صف ارقام کی موجود نہ ہو تو جتنی رقمون کی تعداد اس صف مین ہوگی اوتنی ہی کم از کم خیالی قیمتین اوس مساوات کی ہونگین

فرض کرو کہ ج (لا) مین درمیان لا^م اور لا^م−۲ر+۱ کے ایک صف ۲ر رقمون کی موجود نہ ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کم از کم خیالی قیمتین ۲ر ہونگین فرض کرو کہ ا اور ب مثال لا^م اور لا^م−۲ر−۱ کو ج (لا) مین تعبیر کرین اور ارقام جو موجود نہین وہ مثال ق۱ اور ق۲ اور ق۲ر کے ساتھہ داخل کیجائین تو اس جملہ مین

ا لا^م + ق۱ لا^م−۱ + ق۲ لا^م−۲ + ۰۰۰۰ + ق۲ر لا^م−۲ر + ب لا^م−۲ر−۱

مین تغیرات علامت کی تعداد مع تواترات علامت کی تعداد کی ۲ر + ۱ ہی اسکو یون بیان کرو کہ اس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد اور اوس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد جسمین علامت لا کی بدل جاوی ملکر برابر ۲ر + ۱ کی ہین اب جو ارقام فرضیہ داخل کی ہین اونکو ساقط کرو

تو اگر ا اور ب کی مختلف علامتیں ہیں تو ایک تغیر علامت کا ج (لا) میں ہوگا اور ج (-لا) میں کوئی تغیر نہ ہوگا اور اگر ا اور ب کی یکساں علامتیں ہیں تو ایک تغیر علامت ج (-لا) میں ہوگا اور ج (لا) میں کوئی تغیر نہ ہوگا اسواسطے دونو صورتوں میں ۲ر رقموں کی ساقط ہونے سے ج (لا) اور ج (-لا) میں نقصان ۲ر تغیرات علامت کا واقع ہوتا ہے

اور یہہ قاعدہ تمام اصناف منقوص پر جنمیں جفت ارقام ہوں حاوی ہے پس اسی سے معلوم ہوا کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی اتنی خیالی قیمتیں ہیں جتنی کہ تعداد رقموں کی اس صنف منقوص میں ہے

(۱۷) اگر کسی مساوات میں ایک صنف طاق ارقام کی موجود نہ ہو پس اگر یہہ صنف منقوص ایسی دو رقموں کے درمیان واقع ہے کہ اونکی علامتیں یکساں ہیں تو مساوات کی خیالی قیمتوں کی تعداد اس صنف کی ارقام کی تعداد سے بقدر ایک کے کم از کم زیادہ ہوگی اور اگر صنف منقوص ایسی دو رقموں کی درمیان واقع ہے کہ اونکی علامتیں متضاد ہیں تو مساوات کی خیالی قیمتوں کی تعداد اس صنف کی ارقام کی تعداد سے کم از کم بقدر ایک کے کم ہوگی

فرض کرو کہ ج (لا) میں درمیان ا لا^م اور ب لا^(م-۲ر-۲)

کے ۲ر+۱ رقمیں موجود نہیں ہیں اور ا لا^م اور ب لا^(م-۲ر-۲) کی امثال ا اور ب علیحدہ علیحدہ ہیں

پس اگر ا اور ب کی یکساں علامت ہے تو مساوات ج (لا) = ۰ کی ۲ر+۲ خیالی قیمتیں ہونگیں

اور اگر ا اور ب کی علامتیں متضاد ہیں تو مساوات ج (لا) = ۰ کی ۲ر خیالی قیمتیں ہونگیں

فرض کرو کہ ارقام منقوصہ بمثال ق۱ اور ق۲ اور ق۳ ... داخل کیجائیں تو جملہ

ا لا^م + ق۱ لا^(م-۱) + ق۲ لا^(م-۲) + ... + ق۲ر+۱ لا^(م-۲ر-۱) + ب لا^(م-۲ر-۲)

میں تعداد تغیرات علامت کی مع تعداد تغیر علامت کی ۲ر+۲ ہیں یا اس مطلب کو اسطرح ادا کرو کہ اس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد اور اوس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد جسمیں کہ لا کی علامت بدل دیجاتی ملکر ۲ر+۲ ہیں اور جب ارقام فرضیہ جو داخل کیں تہیں خارج کی جائیں تو اگر ا اور ب کی یکساں علامتیں ہیں تو ج (لا) اور ج (-لا) میں کوئی تغیر علامت نہ ہوگا

اور اگر ا اور ب کی علامتین متضاد ہین تو ایک تغیر علامت ج (لا) اور ج (-لا) مین واقع ہوگا اسواسطے ج (لا) مین ۲ر+ ا رقمون کی ساقط ہونی سی ج (لا) اور ج (-لا) کی تعداد تغیرات علامت مین سی ۲ر+۲ کا نقصان عاید ہوتا ہی اگر صنف منقوص ارقام متحد العلامت کے درمیان واقع ہو اور ۲ر تغیرات علامت کا نقصان عاید ہوتا ہی اگر صنف منقوص ارقام مختلف العلامت کی درمیان واقع ہو اور یہہ قاعدہ تمام اصناف منقوصہ پر جنمین تعداد ارقام طاق ہون حاوی ہے اسواسطے مساوات ج (لا) = ۰ کی کم از کم اوتنی قیمتین خیالی ہونگین جیسا کہ دعوی مین بیان کیا ہے

(۷۲) اب دفعہ ۷۱ کی یہہ ایک مثال ہی کہ اگر ج (لا) مین دو رقمین یکسان علامت کی ہون اور اونکی درمیان ایک رقم مفقود ہو تو کم از کم اوسکی دو ناممکن قیمتین ہونگین اور اگر ایک رقم ایسی دو رقمون کی درمیان مفقود ہو کہ اونکی علامتین متضاد ہون تو اوسی کچہہ نتیجہ ہم نہین نکال سکتی کہ اوسکی خیالی قیمتین کتنی ہین

اب اس بات پر بہی غور کرنی چاہی کہ ارقام منقوصہ کی نسبت سی ج (لا) اور ج (-لا) کے تغیرات علامت کی تعداد چہوٹی مساوات کی درجہ کی تعداد سی ہوتی ہی اور ان دونو تعدادون کا حاصل تفریق جفت عدد ہوتا ہی

دفعات ۷۰ اور ۷۱ کی دو ممکن صورتون کی امتحان کرنی سی یہہ بات ظاہر معلوم ہوتی ہی یعنی اگر طریقہ کتابت مقادیر کو موافق دفعہ ۶۹ کے اختیار کرین تو عدد ن - مو - مو ہمیشہ ایک جفت عدد ہوتا ہی اور موافق دفعہ ۶۸ کی ہم کو اسی نتیجہ کی نکلنی کی پہلی سی توقع تہی

باب ہشتم مساوی قیمتین

(۷۳) بعض اوقات تو اس بات کی معلوم ہونیکی کہ مساوات مفروضہ مساوی قیمتین رکہتی ہے ضرورت پڑتی ہی اور بعض اوقات اس بات کی جاننی سی آسانی ہوتی ہی چنانچہ یہہ بات اس کتاب کے آگے مطالعہ کرنی سی معلوم ہو جائیگی اسواسطے اب اس بات کو بیان کرینگی کسطرح مساوات کی متساوی قیمتون کو تحقیق کرتی ہین اور کسطرح اون اجزاء ضربی کو موافق

مساوی قیمتون کی مساوات مین ہوتی ہین خارج کرتے ہین اور کسیطرح خارج کرکے مساوات کی تحویل ایسی مساوات کی طرف کرلیتی ہین کہ اوسکی قیمتین غیر مساوی ہوتی ہین اول ہم ایک خاصیت جملہ معلوم کی اول جملہ مشتقہ کی ثابت کرتے ہین

(۷۴) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور جَ (لا) اوسکا اول جملہ مشتقہ ہو تو یہہ ہوگا کہ

$$\text{جَ (لا)} = \frac{\text{ج (لا)}}{\text{لا} - \text{ا}} + \frac{\text{ج (لا)}}{\text{لا} - \text{ب}} + \frac{\text{ج (لا)}}{\text{لا} - \text{ح}} + \cdots + \frac{\text{ج (لا)}}{\text{لا} - \text{ک}}$$

اسمین ا اور ب اور ح . . . ک خیالی اور حقیقی قیمتین مساوات ج (لا) = ۰ کی ہین

وجہ اسکی یہہ ہی کہ ج (لا) مین لا کی اعلی قوت کا سر ع. فرض کرو تو بموجب دفعہ ۳۴ کے ہم کو یہہ متطابقہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ج (لا)} = \text{ع} (\text{لا} - \text{ا}) (\text{لا} - \text{ب}) (\text{لا} - \text{ح}) \cdots (\text{لا} - \text{ک}) \quad (۱)$$

د + ی بجای لا کے رکھو تو

$$\text{ج (د + ی)} = \text{ع} (\text{د} + \text{ی} - \text{ا}) (\text{د} + \text{ی} - \text{ب}) (\text{د} + \text{ی} - \text{ح}) \cdots (\text{د} + \text{ی} - \text{ک})$$

ہر طرف مساوات کو ایک سلسلہ مین بموافق قوای متصاعدہ ی کی پہلاؤ تو بموجب دفعہ ۱۲ کے دائین طرف کی یہہ صورت ہوگی کہ

$$\text{ج (د)} + \text{جَ (د) ی} + \text{جً (د)} \frac{\text{ی}^{۲}}{۱ \times ۲} + \cdots$$

پس سر ی کا جَ (د) ہی اور اسواسطے جَ (د) برابر ہوگا بائین طرف مین ی کی سر کے یعنی

$$\text{ع} (\text{د} - \text{ب}) (\text{د} - \text{ح}) \cdots (\text{د} - \text{ک}) + \text{ع} (\text{د} - \text{ا}) (\text{د} - \text{ح}) \cdots (\text{د} - \text{ک}) + \cdots$$

یعنی $\frac{\text{ج (د)}}{\text{د} - \text{ا}} + \frac{\text{ج (د)}}{\text{د} - \text{ب}} + \frac{\text{ج (د)}}{\text{د} - \text{ح}} + \cdots + \frac{\text{ج (د)}}{\text{د} - \text{ک}}$

اور مقادیر متغیر کی واسطے ہر رمز کو کام مین لاسکتی ہین جسکی کچھہ ہی قیمت ہو اسلئی د کو لا سی بدل تی ہین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{جَ (لا)} = \frac{\text{ج (لا)}}{\text{لا} - \text{ا}} + \frac{\text{ج (لا)}}{\text{لا} - \text{ب}} + \frac{\text{ج (لا)}}{\text{لا} - \text{ح}} + \cdots + \frac{\text{ج (لا)}}{\text{لا} - \text{ک}} \quad (۲)$$

اب یہہ نتیجہ اوس صورت مین بہی صحیح ہی کہ مقادیر ا و ب و ح . . . مین

ایک یا کئی برابر ا یا برابر ب کی ہو . . . اور علے ہذا القیاس
اب کل مین فرض کرو کہ ا ٹھیک ر دفعہ اور ب ٹھیک ص دفعہ اور ح ٹھیک ط دفعہ . . . واقع ہوتا ہے
(۱) کو اسطرح لکھہ سکتی ہین کہ

ج (لا) = ع. (لا − ا)^ر (لا − ب)^ص (لا − ح)^ط . . . .

اور (۲) کو اسطرح لکھہ سکتی ہین

جَ (لا) = ر ج (لا) / (لا − ا) + ص ج (لا) / (لا − ب) + ط ج (لا) / (لا − ح) + ...

(۷۵) اگر ج (لا) اور جَ (لا) کا کوی وفق مشترک جسمین لا متقدر ہو ہوگا تو مساوات ج (لا) = ۰ کے برابر قیمتین ہونگین اور اگر وفق مشترک نہ ہوگا تو کوئی برابر قیمت نہین ہوگی
فرض کرو کہ ا و ب و ج . . . ک حقیقی یا خیالی قیمتین مساوات ج (لا) = ۰ کے ہین تو

ج (لا) = ع (لا − ا) (لا − ب) (لا − ج) . . . (لا − ک)

تو جَ (لا) = ع. (لا − ب) (لا − ج) . . . (لا − ک) + ع. (لا − ا) (لا − ح) . . . (لا − ک) . . .

اگر ا اور ب اور ح . . . ک تمام غیر مساوی قیمتین ہون تو اجزاء ضربی (لا − ا) و (لا − ب) لا − ج و . . . لا − ک مین کوئی جزو ضربی جَ (لا) کو نہین تقسیم کریگا وجہ اسکی یہہ ہے کہ لا − ا ہر یک رقم جَ (لا) کو پورا تقسیم کرتا ہی مگر اول رقم کو نہین تقسیم کرتا اور علی ہذا القیاس اور اجزاء ضربی کی کیفیت ہی اور ان اجزاء ضربی مین سی حاصل ضرب بہی کتنی ایک اجزاء ضربی کا نہین پورا تقسیم کریگا اسی ثابت ہوا کہ اگر ج (لا) اور جَ (لا) کوئی وفق مشترک نہین رکہتا تو ج (لا) کوئی مساوی اجزاء ضربی نہین رکہتا پس معلوم ہوا کہ اگر ج (لا) اور جَ (لا) وفق مشترک رکہتی ہون تو ج (لا) کی سب اجزاء ضربی غیر مساوی بہی نہین ہوسکتے
دوم فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی برابر قیمتین ہین اور ر دفعہ ا اور ص دفعہ ب اور ط دفعہ ج اور علی ہذا القیاس واقع ہوتا ہے تو

جَ (لا) = ع. (لا − ا)^ر (لا − ب)^ص (لا − ج)^ط . . . [ر / (لا − ا) + ص / (لا − ب) + ط / (لا − ج) + . . .]

اس صورت مین جز ضربی $(لا-ا)^{م-۱} (لا-ب)^{ن-۱} (لا-ح)^{ط-۱}$
جَ (لا) کی ہر رقم مین واقع ہوتا ہی پس اگر ج (لا) کے برابر اجزا ضربی ہون تو
ج (لا) اور جَ (لا) کا وفق مشترک ہوگا اسی معلوم ہوا کہ اگر ج (لا) اور جَ (لا) کا
وفق مشترک نہ ہو تو ج (لا) کے برابر اجزاء ضربی نہین ہونگے

(۷۶) اس مساوات پر خیال کرو کہ

$$ج(لا) = لا^{۴} - ۱۱ لا^{۳} + ۴۴ لا^{۲} - ۷۶ لا + ۴۸ = ۰$$

یہان $جَ(لا) = ۴ لا^{۳} - ۳۳ لا^{۲} + ۸۸ لا - ۷۶$

اب یہان یہہ دریافت ہوتا ہی کہ ج (لا) اور جَ (لا) کا وفق مشترک لا - ۲ ہی اسی ثابت ہوتا ہے کہ
$(لا-۲)^{۲}$ ایک جز ضربی ج (لا) کا ہے اور یہہ بہی دریافت ہوتا ہے کہ

$$ج(لا) = (لا-۲)^{۲} (لا^{۲} - ۷ لا + ۱۲) = (لا-۲)^{۲} (لا-۳) (لا-۴)$$

پس ج (لا) کے قیمتین ج (لا) = ۰ کی ۲ و ۲ و ۳ و ۴ ہین

اب پہر اس مساوات پر خیال کرو کہ

$$ج(لا) = ۲ لا^{۴} - ۱۲ لا^{۳} + ۱۹ لا^{۲} - ۶ لا + ۹ = ۰$$

یہان یہہ دریافت ہوگا کہ ج (لا) اور جَ (لا) وفق مشترک لا - ۳ رکہتی ہین اور
$ج(لا) = (لا-۳)^{۲} (۲ لا^{۲} + ۱)$ پس قیمتین ج (لا) = ۰ کی

$$۳ \text{ و } ۳ \text{ و } +\sqrt{-\tfrac{۱}{۲}} \text{ و } -\sqrt{-\tfrac{۱}{۲}} \text{ ہین}$$

(۷۷) دفعہ ۷۵ مین یہہ عبارت جو لکہتی ہین کہ جسمین لا ملتی ہو اوسی یہہ غرض ہی کہ ہم جز ضربی ع پر کچہہ لحاظ نہین کرتی گو وہ بعض لحاظ سی وفق مشترک ج (لا) اور جَ (لا) کا خیال کیا جا سکتا ہے اب چونکہ اول دفعہ ہم جملون کے وفق مشترک کا ذکر چہیڑا ہی اسلئی مناسب معلوم ہوتا ہی کہ ہم کچہہ کیفیت اس مضمون کی لکہین دستور کی بات ہی کہ وفق مشترک اور وفق اعظم مشترک کے مسائل الجبرا مین بیان ہوتی ہین مگر یہہ کچہہ ضرور نہین کہ ابتداء تحصیل ریاضیہ مین ہی ان مسائل کو طلبا مطالعہ کرین

بلکہ وہ بعد دفعہ ۳۳ کے ماحصل کے خوب سمجھ مین اتا ہی فرض کرو کہ

ج (لا) اور مج (لا) دو جملون صحیحہ ناطقہ لا کو تعبیر کرتا ہی تو ج (لا) اور مج (لا) کو اجزاء ضربی مین تحلیل کر سکتی ہین کیونکہ

ج (لا) = ع. (لا − ا۱) (لا − ا۲) (لا − ا۳) . . . .

مج (لا) = ق. (لا − ب۱) (لا − ب۲) (لا − ب۳) . . . .

اور ان جملون مین سی ہر یک صرف ایک طور سی اجزاء ضربی مین تحلیل ہو سکتا ہے

اسی معلوم ہوا کہ جملہ لا کا اعلی درجہ کا دونو ج (لا)

اور مج (لا) کو جو پورا تقسیم کریگا وہ حاصل ضرب اجزاء ضربی مشترک اول درجہ لا کا ہوگا

اور اسکو ہم ج (لا) اور مج (لا) کا وفق مشترک اعظم کہتے ہین

یہان ہم کچھ لحاظ ع. اور ق. کا نہین کرتی اگر ہم چاہین تو عددی وفق اعظم اونکا اگر وہ دونو عدد ہون نکال لین اور اگر وہ کسی اور مقدار مثلاً د کے جملے ہون تو ان د کی جملون کا وفق مشترک اعظم دریافت کر لین

(۷۸) فرض کرو کہ ج (لا) = ع. (لا − ا)^ر (لا − ب)^ص (لا − ج)^ط . . . . تو

بموجب دفعہ ۷۵ کی وفق مشترک (لا − ا)^(ر−۱) (لا − ب)^(ص−۱) (لا − ج)^(ط−۱) . . . . .

ہوگا پس وفق مشترک اون تمام اجزاء ضربی مساویہ سی ملتف ہی جو ج (لا) میں واقع ہوتی ہے

اور ہر صورت مین قوت نما اپنی نظیر کی قوت نما سی ج (لا) مین بقدر ایک کے کم ہی اور ج (لا)

کو وفق مشترک ج (لا) اور مج (لا) پر تقسیم کرین تو خارج قسمت مین تمام اجزاء

ج (لا) مین واقع ہوتی ہی ملتف ہونگی اور ہر یک جزء ضربی ایک دفعہ واقع ہوگا پس جو مساوات اس خارج قسمت

کو برابر صفر کی لکھنی سی حاصل ہوگی اوسمین کوئی قیمت مکرر مساوات ج (لا) = ۰ کی نہین واقع ہوگی

(۷۹) ہم دیکھتی ہین کہ اگر جزء ضربی (لا − ا)^ر کا ج (لا) مین واقع ہو تو جزء ضربی

(لا − ا)^(ر−۱) کا جَ (لا) مین واقع ہوگا اسلئی مساوات جَ (لا) = ۰ کے

ر − ا قیمتین ہونگین جنمین سی ہر واحد مساوی ا کی ہوگی اب جً (لا) اول جملہ مشتق جَ (لا)

کا ہی پس اگر ر − ا بڑا بہ نسبت ا کی ہو تو جَ (لا) اور جً (لا) کا ایک وفق مشترک ہوگا

اور مساوات ج‌‌‌‌″ (لا) = ۰ کی ر - ۲ ہونگین جنمین سی ہر ایک برابر ۱ کے ہوگا

پس اسطرح ہم ثابت کر سکتی ہین کہ (لا - ۱)ر ایک جز ضربی ج (لا) کا ہو جو مشتقہ جملے

ج′ (لا) و ج″ (لا) . . . ج^ر-۱ (لا) سب کے سب لا = ۱ سے فنا ہو جائینگے

اور یہہ اسطرح بھی ثابت ہو سکتی ہین

فرض کرو کہ ج (لا) = (لا - ۱)ر مج (لا) اسمین مج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا فرض کیا گیا ہے

جسمین جز ضربی لا - ۱ داخل نہین ہے لا = ۱ + ی رکھو تو

ی^ر مج (۱ + ی) = ج (۱ + ی)

= ج (۱) + ج′ (۱) ی + . . . + ج^ر (۱) ی^ر/|ر + . . . + ج^ن (۱) ی^ن/|ن +

اب دائین طرف کا رکن ی^ر پر پورا تقسیم ہوتا ہی تو بائین طرف کا رکن بھی پورا ی^ر پر پورا تقسیم ہونا چاہیے

پس یہہ حاصل ہوگا کہ

ج (۱) = ۰ ج′ (۱) = ۰ . . . ج^ر-۱ (۱) = ۰

اور چونکہ دائین طرف کا رکن پورا ی کی کسی قوت پر جو ی^ر سی اعلی درجہ رکھتی ہو نہین تقسیم ہوتا

اسلئی ضرور ہی کہ بائین طرف کا رکن بھی ایسا ہو اسیواسطی ج^ر (۱) صفر نہین ہے پس

تعداد ارقام سلسلہ ج (لا) اور ج′ (لا) اور ج″ (لا) . . . مین جو لا = ۱ کی ہونی سی فنا ہوتی ہین

اوتنی ہی جتنی لا - ۱ کا ج (لا) مین قوت نما ہے

مثلاً فرض کرو کہ

ج (لا) = لا^۵ + ۲ لا^۴ + ۳ لا^۳ + ۷ لا^۲ + ۸ لا + ۳

یہان یہہ دریافت ہوگا کہ سلسلہ ج (لا) و ج′ (لا) . . . مین

ج‴ (لا) اول ہی لا = -۱ سی فنا نہین ہوتا پس جز ضربی (لا + ۱)^۳ کا ج (لا) مین

واقع ہوتا ہے اور یہہ دریافت ہوگا کہ ج (لا) = (لا + ۱)^۳ (لا^۲ - لا + ۳)

(۸۰) ایک اور طریقہ مختصر مساوی قیمتون کی تحقیق کرنے کا ہم بیان کرتے ہین

اگر مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک سی زیادہ قیمتین برابر ا کی رکہتی ہو تو اسی یہہ نتیجہ نکلیگا کہ ج (لا) کو لا - ا پر تقسیم کرنی سی جو خارج قسمت نکلتا ہی وہ لا = ا سی معدوم ہوتا ہے پس موافق دفعہ ۷ کے خارج قسمت کی نکالنے سی یہہ حاصل ہوگا کہ

ن ع. ا^ن-۱ + (ن-۱) ع۱ ا^ن-۲ + ... + ۲ ع ن-۲ ا + ع ن-۱ = ۰

یعنی جَ (لا) فنا ہو جائیگا جب لا = ا کے ہو

(۸۱) پس اسی یہہ معلوم ہوا کہ جب ہم کو مساوات ج (لا) = ۰ کی برابر قیمتوں کا دریافت کرنا منظور خاطر ہو تو ہم آغاز اسطرح کرین کہ + و فق مشترک اعظم ج (لا) اور جَ (لا) کا دریافت کرین اور اس وفق مشترک اعظم کو برابر صفر کی لکہکر مساوات بنائین تو پہر ایک مساوات حل کرنی کی لئی ایسی حاصل ہو جائینگی کہ جسکی قیمتین وہ ہونگین جو مساوات ج (لا) = ۰ کی مکرر قیمتین ہین اور چونکہ یہہ وفق مشترک اعظم خود ایک پیچیدہ جملہ ہو سکتا ہی جسمین اجزاء ضربیہ مساویہ ملتف ہون اسواسطی یہہ فایدہ مند ہوگا کہ ہم عمل کو ایسی ضبط اور نظم کی ساتہہ کرین کہ قیمتین حتی الامکان تہوڑی سی محنت سی حاصل ہو جائین اور اب اس بات کو ہم لکہتی ہین

(۸۲) فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ ایک مساوات ہو جسکی برابر قیمتین ہون اور

ج (لا) = لا۱ لا۲^۲ لا۳^۳ لا۴^۴ ... لام^م

اسمین حاصل ضرب اون تمام اجزاء ضربی کا جو ایک دفعہ واقع ہوتی ہین لا۱ سی اور حاصل ضرب اون اجزاء ضربی کا جو دو دفعہ واقع ہوتی ہین لا۲^۲ سی اور حاصل ضرب اون اجزاء ضربی کا جو تین دفعہ واقع ہوتے ہین لا۳^۳ سی اور علی ہذا القیاس تعبیر ہوئی ہین اگر کوئی جزء ضربی ج (لا) مین اوتنی دفعہ نہ آیا ہوگا جتنی دفعہ کہ بیان کیا گیا تو ایک یا کئی مقادیر

لا۱ و لا۲ و لا۳ ... مین سی برابر واحد کی ہو جائینگین

اب ج (لا) سی اول جملہ مشتقہ جَ (لا) کا حاصل کرو اور پہر وفق مشترک اعظم ج (لا) اور جَ (لا) کا حاصل کرو اور اس وفق اعظم کو ج۱ (لا) سے تعبیر کرو

$$\text{ج}_{۱}(\text{لا}) = \text{لا}_{۲}\,\text{لا}_{۳}^{۲}\,\text{لا}_{۴}^{۳} \dots \text{لا}_{\text{م}}^{\text{م}-۱}$$

اور پہر وفق اعظم $\text{ج}_{۱}(\text{لا})$ اور اوسکی اول جملہ مشتقہ $\text{ج}'_{۱}(\text{لا})$ کا حاصل کرو اور اوسکو $\text{ج}_{۲}(\text{لا})$ سے تعبیر کرو

تو
$$\text{ج}_{۲}(\text{لا}) = \text{لا}_{۳}\,\text{لا}_{۴}^{۲} \dots \text{لا}_{\text{م}}^{\text{م}-۲}$$

اسیطرح متواتر عمل کئی جاؤ تو

$$\text{ج}_{۳}(\text{لا}) = \text{لا}_{۴}\,\text{لا}_{۵}^{۲} \dots \text{لا}_{\text{م}}^{\text{م}-۳}$$

$$\text{ج}_{۴}(\text{لا}) = \text{لا}_{۵} \dots \text{لا}_{\text{م}}^{\text{م}-۴}$$

$$\vdots$$

$$\text{ج}_{\text{م}-۱}(\text{لا}) = \text{لا}_{\text{م}}$$

$$\text{ج}_{\text{م}}(\text{لا}) = ۱$$

اب ایک نیا سلسلہ جملون کا اسطرح تبدیل کرو کہ سلسلہ

$$\text{ج}(\text{لا})\ \text{و}\ \text{ج}_{۱}(\text{لا})\ \text{و}\ \text{ج}_{۲}(\text{لا}) \dots \text{ج}_{\text{م}}(\text{لا}) \dots$$

ہر رقم کو $\text{ج}_{\text{م}-۱}(\text{لا})$ تک اپنے ما قبل کی رقم پر تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$\dfrac{\text{ج}(\text{لا})}{\text{ج}_{۱}(\text{لا})} = \text{لا}_{۱}\,\text{لا}_{۲} \dots \text{لا}_{\text{م}} = \text{مج}_{۱}(\text{لا})$ کے مقرر کرو

$\dfrac{\text{ج}_{۱}(\text{لا})}{\text{ج}_{۲}(\text{لا})} = \text{لا}_{۲} \dots \text{لا}_{\text{م}} = \text{مج}_{۲}(\text{لا})$ کے مقرر کرو

$\dfrac{\text{ج}_{\text{م}-۲}(\text{لا})}{\text{ج}_{\text{م}-۱}(\text{لا})} = \text{لا}_{\text{م}-۱}\,\text{لا}_{\text{م}} = \text{مج}_{\text{م}-۱}(\text{لا})$ کے مقرر کرو

$\dfrac{\text{ج}_{\text{م}-۱}(\text{لا})}{\text{ج}_{\text{م}}(\text{لا})} = \text{لا}_{\text{م}} = \text{مج}_{\text{م}}(\text{لا})$ کے مقرر کرو

پس آخر کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{مج}_{۱}(\text{لا})}{\text{مج}_{۲}(\text{لا})} = \text{لا}_{۱}\ \text{و}\ \frac{\text{مج}_{۲}(\text{لا})}{\text{مج}_{۳}(\text{لا})} = \text{لا}_{۲} \dots \frac{\text{مج}_{\text{م}-۱}(\text{لا})}{\text{مج}_{\text{م}}(\text{لا})} = \text{لا}_{\text{م}-۱}\ \text{اور}\ \text{مج}_{\text{م}}(\text{لا}) = \text{لا}_{\text{م}}$$

غرض اجزاء ضربی $\text{لا}_{۱}$ اور $\text{لا}_{۲} \dots \text{لا}_{\text{م}}$ اب علیحدہ علیحدہ ہوگئی اور مساوات $\text{لا}_{۱} = ۰$ اور $\text{لا}_{۲} = ۰$ اور $\dots \text{لا}_{\text{م}} = ۰$ کے حل کرنے سے قیمتین

مساوات مفروضہ ج (لا) کی حاصل ہو جائیگی اور کوئی قیمت $\text{کا}_{\text{ر}} = 0$ سے جو دریافت ہوگی وہ ر دفعہ مساوات ج (لا) = ۰ مین واقع ہوگی

(۸۳) دفعہ گذشتہ کی عمل کی لئی یہہ مثال ہی فرض کرو کہ

$$\text{ج}(\text{لا}) = \text{لا}^8 + \text{لا}^7 - 8\,\text{لا}^6 - 6\,\text{لا}^5 + 21\,\text{لا}^4 + 9\,\text{لا}^3 - 22\,\text{لا}^2 - 4\,\text{لا} + 8$$

اب طریقہ کتابت جملون کا دفعہ سابق کی موافق رہنی دین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ج}_1(\text{لا}) = \text{لا}^4 + \text{لا}^3 - 3\,\text{لا}^2 - \text{لا} + 2$$

$$\text{ج}_2(\text{لا}) = \text{لا} - 1$$

$$\text{ج}_3(\text{لا}) = 1$$

$$\text{مج}_1(\text{لا}) = \text{لا}^4 - 5\,\text{لا}^2 + 4$$

$$\text{مج}_2(\text{لا}) = \text{لا}^3 + 2\,\text{لا}^2 - \text{لا} - 2$$

$$\text{مج}_3(\text{لا}) = \text{لا} - 1$$

$$\text{کا}_1 = \text{لا} - 1$$

$$\text{کا}_2 = \text{لا}^2 + 3\,\text{لا} + 2$$

$$\text{کا}_3 = \text{لا} - 1$$

اسیواسطے $\text{ج}(\text{لا}) = (\text{لا} - 2)(\text{لا}^2 + 3\,\text{لا} + 2)^2(\text{لا} - 1)^3$

$$= (\text{لا} - 2)(\text{لا} + 1)^2(\text{لا} + 2)^2(\text{لا} - 1)^3$$

پس قیمتین مساوات ج (لا) = ۰ کی ۲ و −۱ و −۱ و −۲ و −۲ و ۱ و ۱ و ۱ ہین

(۸۴) جب ایک مساوات کی امثال سب کے سب مقادیر ناطقہ محدودہ ہونگے تو دفعہ ۸۲ مین کا_1 و کا_2 ۰ ۰ ۰ کی امثال ناطقہ محدودہ ہونگے اسی معلوم ہوا کہ اگر صرف ایک ہی قیمت مساوات کی قیمتون مین سی جسمین امثال مقادیر ناطقہ محدودہ ہون ر دفعہ مکرر لین تو وہ مقدار ناطقہ محدودہ ہوگی کیونکہ وہ مساوات $\text{کا}_{\text{ر}} = 0$ نکلیگی جسمین مقادیر غیر ناطقہ ملتف نہین ہین

اسی ہم یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ ایک مساوات تیسرے یا پانچوین درجہ کی جسمین امثال مقادیر ناطقہ محدودہ ہون اور اوسکی کوئی قیمت ناطقہ محدودہ نہ ہو تو اوسکی برابر کوئی قیمتین نہین ہونگین اور اگر مساوات چوتھی درجہ کی ہو اور اوسکی امثال ناطقہ محدودہ ہون اور کوئی قیمت اوسکی ناطقہ محدودہ نہ ہو اور پھی اوسکی برابر قیمتین ہون تو اوسکی دو قیمتین غیر ناطق ہونگین اور ہر ایک دو دفعہ مکرر آئینگی پس اگر

ج (لا) = ۰ مساوات ہو تو ج (لا) ایک مجذور کامل ہوگا

ساتوان باب مساوات کی قیمتوں کی حدود نمائی اور قیمتوں کا جدا جدا کرنا

(۸۵) اب ہم چند مسائل لکھتی ہین جنسی یہہ دریافت ہوگا کہ مساوات کی تمام حقیقی قیمتین حدود نمائی کی درمیان واقع ہین اور پھر ہم اس بات کی تحقیق کرینگے کہ ہر قیمت کی جدا جدا حد نمائی دریافت کرنی کہان تک ممکن ہی اور ایسی مسایل کی لکھنی کا فائدہ یہہ ہی کہ چوتھی درجہ کی مساوات سی زیادہ درجہ کا مساوات عامہ کا حل جبریہ نہین حاصل ہو سکتا مگر ہم کو علم بعض خاص قیمتوں کا تقریباً حاصل ہوتا ہی اور اوسکی استعانت سی ہم مساواتون کا اعداد مین حل کر سکتی ہین غرض ان حدود نمائی کی معلوم ہونی سی تقریبی قیمتوں کا علم ہوگا اور پھر اوسی مساواتون کا حل چوتھی درجہ سی زیادہ کا دریافت ہوگا

اس ساری باب مین ہر جگہ قیمت سی حقیقی قیمت سمجھی جائے اگر کہین اوسکی خلاف نہ بیان کیا گیا ہو تمام باب حقیقی قیمتوں ہی سے متعلق ہے

(۸۶) جب ہم کہتی ہین کہ ایک خاص مقدار مساوات کی مثبت قیمتوں کی اعلی حد نمائی ہی تو اوسی کی مراد یہہ ہوتی ہی کوئی مثبت قیمت مساوات کی اوس مقدار سی زیادہ نہین ہو سکتی

(۸۷) جو مساوات اپنی سادی صورت مین ہو اوسمین جو منفی امثال سب سے بڑا تعداداً ہو اوسمیں ایک زیادہ کرو تو حاصل جمع اس مساوات کی مثبت قیمتوں کا اعلی حد نمائی ہوگا

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات ن درجہ کی ہی اور تعداداً ع سب سے بڑا منفی امثال ج (لا) مین ہی پس اگر ایک قیمت لا کی ایسی دریافت کیجاوی کہ ج (لا) اس قیمت کی موافق اور اوسی تمام بڑی قیمتوں کی موافق مثبت ہو تو وہ قیمت مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت

کی مثبت قیمتوں کی اعلی حد غائی ہوگی اب اگر کوئی مثبت قیمت لا کی

$$لا^{ن} - ع\,(لا^{ن-۱} + لا^{ن-۲} + لا^{ن-۳} + \dots + لا + ۱)$$

کو مثبت بنا دی تو وہ بدرجہ اولی ج (لا) کو مثبت بنائیگی یعنی لا کی مثبت قیمت سی ج (لا) مثبت ہوتا ہی اگر $لا^{ن} - \frac{لا^{ن}-۱}{لا-۱}$ مثبت ہی اور جب یہہ مثبت ہی تو $لا^{ن} - ۱ - ع\,\frac{لا^{ن}-۱}{لا-۱}$

بدرجہ اولی مثبت ہی یعنی اگر $(لا^{ن}-۱)\,(۱ - \frac{ع}{لا-۱})$ مثبت ہی اور اخر جملہ مثبت ہوگا

اگر لا − ۱ بڑا ع سی ہی پس ج (لا) مثبت ہی اگر لا برابر ع + ۱ کے ہو

یا ع + ۱ سی بڑا ہو یعنی ع + ۱ اعلی حد غائی مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتوں کی ہے

(۸۸) اگر مساوات ج (لا) = ۰ مین بجای لا کی − ی مندرج کریں اور ن طاق عدد ہو تو ہر رقم کی ایسی علامت بدل دو کہ ی^ن کا سر + ۱ ہو اور فرض کرو کہ اس صورت کی مساوات کا ق تعداداً سب سے بڑا منفی سر ہو تو ق + ۱ اعلی حد غائی ی کی مثبت قیمتوں کی ہوگی

اور اسیواسطے − (ق + ۱) حد غائی لا کی منفی قیمتوں کی ہے

پس اسی معلوم ہوا کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی سب قیمتیں درمیان ع + ۱ اور − (ق + ۱) کے واقع ہوتی ہین

پس اگر مساوات مین تعداداً سب سے بڑی مثال بغیر لحاظ علامت کی م ہو تو مساوات کی تمام قیمتیں درمیان م + ۱ و − (م + ۱) کے واقع ہونگین

(۸۹) اگر مساوات ن درجہ کی اپنی سادی صورت مین ہو اور عددی قیمت سب سے بڑی امثال کی ع ہو اور لا^{ن−ر} سب سے بڑی درجہ کی قوت لا کی ہو جو منفی امثال رکھتی ہو تو $۱ + \sqrt[ر]{ع}$

اعلی حد غائی مثبت قیمتوں کی ہوگی

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات مفروضہ ہو چونکہ تمام رقمین ماقبل لا^{ن−ر} کے مثبت امثال رکھتی ہین تو ج (لا) یقینی لا کی مثبت قیمت کے موافق مثبت ہوگا اگر

$$لا^{ن} - ع\,(لا^{ن-ر} + لا^{ن-ر-۱} + \dots + لا^{۲} + لا + ۱)$$

مثبت ہو یعنی اگر $لا^{ن} - ع\,\frac{لا^{ن-ر+۱}-۱}{لا-۱}$ مثبت ہو پس لا بڑا واحد سی فرض کرو

+۱ ... ع لا^ن ... ع لا^ن (لا−۱) − ع لا^ن اگر لا^ن مثبت ہو یعنی اگر لا^ن (لا−۱) − ع لا^ن

تو ج (لا) مثبت بدرجہ اولیٰ ہوگا اگر لا^ن − ع (لا^ن − ۱)/(لا − ۱) مثبت ہو یعنی اگر لا^ن (لا−۱) − ع لا^ن ...

مثبت ہو یعنی اگر لا^(ن−۱) (لا−۱) − ع مثبت ہو یعنی اگر (لا−۱)^ن برابر یا بڑا ع سے ہو اسی معلوم ہوا کہ

اگر لا = ۱ + ^ن√ع یا کوئی بڑی قیمت اوسکی ہو تو ج (لا) مثبت ہے یعنی

۱ + ^ن√ع اعلیٰ حد غائی مثبت قیمتوں کی مساوات ج (لا) = ۰ میں ہے

(۹۰) اگر مساوات کی سب امثال منفیہ میں سے ہر ایک مثبت بناکر اوسکی ماقبل کی امثال مثبتہ کے مجموعہ پر تقسیم کریں تو جو کسر اسطرح سے سب سے بڑی ہوگی اوس پر ایک زیادہ کرنے سے مثبت قیمتوں کی حد غائی حاصل ہوگی

فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ ہو اسمیں ج (لا)

ع. لا^ن + ع۱ لا^(ن−۱) + ع۲ لا^(ن−۲) − ع۳ لا^(ن−۳) + ع۴ لا^(ن−۴) ...... − ع ر لا^(ن−ر) ... + ع ن

تعبیر کرتا ہے اب ہم کو معلوم ہے کہ

لا^م = (لا−۱) (لا^(م−۱) + لا^(م−۲) + ... + لا + ۱) + ۱

مساوات کے ہر رقم مثبت کو اس صورت قانونیہ کی موافق تبدل کرکی لکھو اور باقی ارقام کو بدستور رہنے دو

تو ج (لا) کی یہہ صورت ہو جائیگی

ع. (لا−۱) لا^(ن−۱) + ع. (لا−۱) لا^(ن−۲) + ع. (لا−۱) لا^(ن−۳) + ... + ع. (لا−۱) + ع.

+ ع۱ (لا−۱) لا^(ن−۲) + ع۱ (لا−۱) لا^(ن−۳) + ... + ع۱ (لا−۱) + ع۱

+ ع۲ (لا−۱) لا^(ن−۳) + ... + ع۲ (لا−۱) + ع۲

− ع۳ لا^(ن−۳)

اب اس جملہ کی عمودی سطروں کو دیکھو کہ جہاں امثال منفیہ نہیں ہیں وہاں سطر عمودی کی قیمت مثبت ہی اگر لا بڑا اسی ہو مگر اوس سطر عمودی میں کہ امثال منفیہ واقع ہوں ہم کو یہہ حاصل ہو جانا چاہیے کہ

(ع. + ع۱ + ع۲) (لا−۱) بڑا ع۳ سے ہو

(ع. + ع۱ + ع۲ + ... + ع ر−۱) (لا−۱) بڑا ع ر سے ہو

اسواسطی چاہی کہ لا بڑا بہ نسبت $\frac{ع_۳}{ع. + ع_۱ + ع_۲}$ + ۱ . . . کی اور

بڑا بہ نسبت $\frac{ع_ر}{ع. + ع_۱ + ع_۲ + . . . + ع_{ر-۱}}$ + ۱ . . . کی ہو اسیواسطی اگر لا

ان متحصلہ جملون مین سی سب سی بڑی جملہ کی برابر فرض کیا جاےے تو وہ قیمت لا کی اور اوسی ہر ایک بڑی قیمت

ج (لا) کو مثبت بنائیگی یعنی ان جملون مین سی سب سے بڑا جملہ اعلی حد غائی مساوات ج (لا) = ۰

کی مثبت قیمتون کی ہے

(۹۱) اب ان قاعدون کی توضیح دو مثالون سی کرتی ہین اول یہہ مساوات لو

لا۵ + ۸ لا۴ − ۱۴ لا۳ − ۵۳ لا۲ + ۵۶ لا − ۱۸ = ۰

بموجب دفعہ ۸۷ کی ۵۳ + ۱ یعنی ۵۴ اعلی حد غائی مثبت قیمتون کی ہی اور بموجب دفعہ

۸۹ کی اس سبب سے کہ لا = ۵ اور ر = ۲ تو حد غائی ۱ + $\sqrt{۵۳}$ ہی یعنی ۹ حد غائی ہے

اور بموجب دفعہ ۹۰ کی ان جملون $\frac{۱۴}{۱ + ۸}$ + ۱ اور $\frac{۵۳}{۱ + ۸}$ + ۱ اور $\frac{۱۸}{۱ + ۸ + ۵۶}$ + ۱

مین سب سے بڑا جملہ لینا چاہی یعنی $\frac{۵۳}{۹}$ + ۱ اسی معلوم ہوا کہ حد غائی ۷ ہے

اب یہہ مساوات لو کہ

لا۵ − ۵ لا۴ − ۱۳ لا۳ + ۲ لا۲ + لا − ۷۰ = ۰

یہان دفعات ۸۷ اور ۸۹ سی ۷۰ + ۱ حد غائی ہی اور بموجب دفعہ ۹۰ کے $\frac{۷۰}{۸۴}$ + ۱

حاصل ہوتا ہے اسی معلوم ہوا کہ ۱۹ حد غائی ہے

پس دونو مثالون مین دفعہ ۹۰ سی اعلی حد غائی سب سے چھوٹی معلوم ہوتی ہی اب یہہ بات آسانی سے

معلوم ہوتی ہی کہ دفعہ ۸۹ سی بہ نسبت دفعہ ۸۷ کی چھوٹی حد غائی معلوم ہوتی ہی مگر ر = ۱ کے

صورت مستثنی ہی اسمین دونو حدود غائی مین تطبیق ہو جاتی ہی علی العموم دفعہ ۸۹ زیادہ کام

دیتی ہے جبکہ اکثر مثبت امثال امثال منفیہ اول کے واقع ہون جسکی سبب سے ر بڑا ہو جاے

اور دفعہ ۹۰ سی ہمیشہ بہ نسبت دفعہ ۸۷ کی چھوٹی حد غائی معلوم ہوتی ہی مگر یہہ صورت مستثنی ہی کہ

سب سے بڑی منفی امثال کی ماقبل ایک ہی مثبت امثال ہو یعنی اول ہی رقم ہو اس صورت مین

دو کو حدود میں تطبیق ہو جاتی ہے علی العموم دفعہ ۹۰ والا زیادہ کام دیتی ہے کہ جہاں مثال ما قبل اشتمال منفی کی واقع ہوں

(۹۲) بعض حکمتیں ایسی ہیں کہ ہم اکثر قواعد عامہ کی نسبت اعلی حد غائی بہت چھوٹی دریافت کر لیتے ہیں دفعہ گذشتہ کی اول مثال پر خیال کرو اب یہاں مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتوں کی حد اعلی دریافت کرنی ہے اسمیں ج (لا) کو اسطرح لکھہ سکتے ہیں کہ

$$لا^{2}(لا^{3}-53)+8لا^{2}\left(لا-\frac{14}{8}\right)+56\left(لا-\frac{9}{28}\right)$$

اب اگر لا برابر ۴ کی یا اوسی کسی بڑی قیمت کی برابر ہو تو خطوط وحدانی کی مابین جملے سب مثبت ہیں اور ایسی ہی ج (لا) مثبت ہی پس ۴ حد غائی مساوات ج (لا) = ۰ کے مثبت قیمتوں کی ہے اب دفعہ مذکور کی دوسرے مثال پر خیال کرو کہ اوسمیں ج (لا) کو اسطرح لکھہ سکتے ہیں کہ

$$لا^{3}(لا^{2}-5لا-13)+2لا^{2}+لا-7$$

اب دفعہ ۸۷ کی امداد سے ہم دیکھتے ہیں کہ $لا^{2}-5لا-13$ مثبت ہی اگر لا = ۱۳ + ۱ یا اسی بڑی قیمت کی پس مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتوں کی ۱۴ اعلی حد غائی ہے

(۹۳) اب بہت آسانی سی مساوات کی مثبت قیمتوں کی حد غائی دریافت کر سکتی ہیں یعنی ایسا عدد دریافت کر سکتے ہیں کہ وہ کسی مثبت قیمت سی مساوات کی بڑا نہ ہو مساوات کو ہیئت بدل کر ایسی مساوات بناؤ کہ جسکی قیمتیں متکافی مساوات مفروضہ کیے حد اجلا کی اب اس بدلی ہوئی مساوات کی مثبت قیمتوں کی اعلی حد غائی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتوں کی ادنی حد غائی ہوگی مثلاً فرض کرو کہ مساوات مفروضہ یہہ ہو

$$لا^{ن}+ع_{1}لا^{ن-1}+ع_{2}لا^{ن-2}+\cdots+ع_{ن-1}لا+ع_{ن}=0$$

لا کی جگہہ $\frac{1}{ی}$ رکہو اور یٰ ن میں ضرب دو اور ع_ن پر تقسیم کرو تو بدلی ہوئی مساوات یہہ حاصل ہوگی

$$ی^{ن}+\frac{ع_{ن-1}}{ع_{ن}}ی^{ن-1}+\cdots+\frac{ع_{2}}{ع_{ن}}ی^{2}+\frac{ع_{1}}{ع_{ن}}ی+\frac{1}{ع_{ن}}=0$$

اب دفعات گذشتہ مین سی کسی ایک دفعہ کی موافق اعلی حد غائی اس مساوات کی دریافت کرو اور اوسکول سی تعبیر کرو تو $\frac{1}{ل}$ ادنی حد غائی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتون کی ہوگی

اب فرض کرو کہ ہم دفعہ ۸۷ کی موافق اعلی حد غائی دریافت کرتی ہین اور $\frac{ع_ر}{ع_ن}$ کو سب سے بڑا امثال منفی تعداداً بدلی ہوئی مساوات مین مانتی ہین تو ا $-\frac{ع_ر}{ع_ق}$ اعلی حد غائی بدلی ہوئی مساوات کی مثبت قیمتون کی ہوگی اور اسیواسطی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتون کی ادنی حد غائی $\frac{ع_ن}{ع_ن - ع}$ ہے

یہان $ع_ن$ واقعی تعداداً سب سے بڑا امثال مساوات مفروضہ مین ہی جو $ع_ن$ سے علامت مین اختلاف رکہتا ہے

مثلاً دفعہ ۹۱ مین $ع_ن = -۱۸$ اور $ع_ر = ۵۶$ پس $\frac{۱۸}{۱۸-۵۶} = \frac{۱۸}{۷۴}$ یعنی $\frac{۱۸}{۷۴}$ یعنی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتون کی حد غائی $\frac{۱۸}{۷۴}$ ہے

(۹۴) مساوات ج (لا) = ۰ کی منفی قیمتون کی حدود غائی دریافت کرو لا کی جگہہ $-ی$ لکہو اور اسطرح جو بدلی ہوئی مساوات حاصل ہو اوسکی مثبت قیمتون کی حدود غائی دریافت کرو تو یہہ حدود غائی جنکی علامتین بدلی ہوئی ہین مساوات مفروضہ کی منفی قیمتون کی حدود غائی ہونگین مثلاً مساوات

$$لا^۵ - ۷ لا^۴ - ۱۵ لا^۳ + ۳ لا^۲ + ۴ لا + ۴۸ = ۰$$

مین $-ی$ کو بجای لا کے رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ی^۵ + ۷ ی^۴ - ۱۵ ی^۳ - ۳ ی^۲ + ۴ ی - ۴۸ = ۰$$

بموجب دفعہ ۹۱ کے $\frac{۴۸}{۴+۷+۱} + ۱$ یعنی ۱۵ اعلی حد غائی مثبت قیمتون کی ہی اور بموجب دفعہ ۹۳ کے $\frac{۴۸}{۴۸+۷}$ ادنی حد غائی منفی قیمتون کی ہی پس مساوات مفروضہ کی قیمت منفیہ درمیان -۱۵ اور $-\frac{۴۸}{۵۵}$ کے واقع ہونگین

(۹۵) اب ہم ایک اور ترکیب مساوات کی مثبت قیمتوں کی اعلی حد غائی کی دریافت کرنی کی لکھتی ہین اور اوسکو نیوٹن صاحب کی ترکیب کہتی ہین

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کرتا ہی جسپر ہم اب بحث کرتی ہین لا کی جگہہ ھ + ی لکھو اور ح (ھ + ی) کو بموجب دفعہ ۱۲ اکی پہلاؤ تو مساوات کی صورت یہہ ہو جائیگی کہ

$$\text{ح}(\text{ھ}) + \text{ی}\,\text{ح}'(\text{ھ}) + \frac{\text{ی}^{2}}{۲}\,\text{ح}''(\text{ھ}) + \cdots + \frac{\text{ی}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}\,\text{ح}^{\text{ن}}(\text{ھ}) = ۰$$

اب فرض کرو کہ ھ مثبت ہی اور اوسکی قیمت ایسی ہی کہ ح (ھ) اور ح' (ھ) اور ح'' (ھ) ۰۰ ح$^{\text{ن}}$ (ھ) سب مثبت ہین تو ی کی کوئی مثبت قیمت اوپر کی مساوات کی شرائط کو پورا نہین کریگی لیکن ی = لا − ھ چونکہ ی مثبت نہین ہوسکتا تو لا بڑا ھ سے نہین ہوسکتا پس ھ ایک اعلی حد غائی مساوات ح (لا) = ۰ کی مثبت قیمتوں کی ہی پس اگر مساوات مفروضہ اپنی سادی صورت مین ہو ح$^{\text{ن}}$ (ھ) سی تو ضرور مثبت ہوگی اور برابر لٹ ہوگی

(۹۶) مثلاً یہہ مساوات لو کہ

$$\text{لا}^{۵} + \text{لا}^{۴} - ۴\,\text{لا}^{۳} - ۶\,\text{لا}^{۲} - ۷۰۰\,\text{لا} + ۵۰۰ = ۰$$

یہان

$$\text{ح}(\text{ھ}) = \text{ھ}^{۵} + \text{ھ}^{۴} - ۴\,\text{ھ}^{۳} - ۶\,\text{ھ}^{۲} + ۷۰۰\,\text{ھ} + ۵۰۰$$

$$\text{ح}'(\text{ھ}) = ۵\,\text{ھ}^{۴} + ۴\,\text{ھ}^{۳} - ۱۲\,\text{ھ}^{۲} - ۱۲\,\text{ھ} + ۷۰۰$$

$$\frac{۱}{۲}\,\text{ح}''(\text{ھ}) = ۱۰\,\text{ھ}^{۳} + ۶\,\text{ھ}^{۲} - ۱۲\,\text{ھ} - ۶$$

$$\frac{۱}{۳!}\,\text{ح}'''(\text{ھ}) = ۱۰\,\text{ھ}^{۲} + ۴\,\text{ھ} - ۴$$

$$\frac{۱}{۴!}\,\text{ح}''''(\text{ھ}) = ۵\,\text{ھ} + ۱$$

اب اسمین آسانی ہی کہ آخر جملہ ھ سی شروع کرین اور باقاعدہ آگے بڑہین کوئی سی مثبت قیمت ھ کی ح'''' (ھ) کو مثبت بناتی ہی ھ = ۱ کے ح''' (ھ) کو مثبت بناتی ہے ھ = ۲ کے ح'' (ھ) کو مثبت بناتی ہی اور ھ = ۴ کے ح' (ھ) کو مثبت بناتی ہے اور ھ = ۵ کے ح (ھ) کو مثبت بناتی ہی تو اسی یہہ دریافت ہوتا ہی کہ ھ = ۵

سب ھ کے جملون کو مثبت بناتی ہی اسواسطی مساوات مفروضہ کی مثبت جملون کی اعلی حد غائی ھ ہی اس بات پر بہی غور کرنی چاہئی کہ جس ترکیب کے موافق ہم اخر جملہ سی چلتی ہین اور ھ کی قیمت مناسب اوپر کی جملون مین بڑہاتی جاتی ہین اوسمین یہہ کچہہ ضرور نہین کہ ہم نچی کی جملون کو جنکی علامت کا پہلی فیصلہ ہوچکا ہی اونکو دوبارہ پہر اس قیمت ھ کی موافق جانچین مثلاً فرض کرو کہ ہم نی یہہ تحقیق کرلیا ہے کہ ھ کی خاص قیمت ا تمام جملون کو حً (لا) تک مثبت بناتی ہی تو ھ کی کوئی بڑی قیمت رکہو مثلاً ا + ب تو اس سبب سے کہ

حً (ا + ب) = حً (ا) + ب حً (ا) + ب۲ / ۱×۲ حً (ا) + . . .

مین تمام رقمین دائین طرف مثبت بموجب فرض کی ہین تو حً (ا + ب) بہی مثبت ہی پس مثال گذشتہ مین جب یہہ دریافت ہوگیا کہ ھ = ۵ کی ح (ھ) کو مثبت کرتا ہی تو اسکی اب ضرورت نہین رہی کہ ہم اور جملون کو بہی دریافت کرین کہ وہ مثبت بناتا ہی یا نہین کیونکہ اس ترکیب ہی سی ہم کو یقین ہوجاتا ہے کہ وہ مثبت بناتا ہے

(۹۷) اب ہم نی یہہ بیان کردیا کہ مساوات کی تمام مثبت حقیقی قیمتون کی حدود غائی کسطرح اور مساوات کی تمام منفی حقیقی قیمتون کی حدود غائی کیونکر دریافت کرتی ہین اب ہم بعض مسائل لکہتی ہین جنسی کہ مقام قیمتون کا جو مفرداً یا مجموعتاً لیجائین معلوم ہوگا پوری تحقیقات اس مضمون کی سٹرم کے ضابطہ مین اگی لکہی ہے

(۹۸) اگر ہم ح (لا) مین لا کی جگہہ متواتر دو مقدارین مندرج کرین اور ان مقدارون کے درمیان مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتین جنکا شمار طاق ہو واقع ہون تو ہم کو نتایج مختلف العلامت حاصل ہونگی اور اگر ہم ح (لا) مین لا کی جگہ متواتر دو مقدارین مندرج کرین جنکی درمیان مساوات ح (لا) = ۰ کی کوئی قیمت نہ واقع ہو اور جو واقع ہون تو اونکا شمار جفت ہو تو نتایج متحد العلامت حاصل ہونگے فرض کرو کہ لر اور لو دو مقدارین ہون جنمین لر بڑا ہو اور ا و ب و ح . . . ک تمام حقیقی قیمتین مساوات ح (لا) = ۰ کی ہون جو درمیان لر اور لو کی واقع ہین تو بموجب دفعہ ۴۳ کی یہہ حاصل ہوگا کہ

ج(لا) = (لا − ا) (لا − ب) (لا − س) . . . (لا − ک) مر (لا)

اسمین مر لا ایک جملہ ایسا ہی جو اجزاء ضربی درجہ دوم کی حاصل ضرب سی بنا ہی جو کبھی اپنی علامت نہین بدلتی یا اصلی اجزاء ضربی سی جو اپنی علامت کبھی ایسی حالت مین نہین بدلتی کہ لا درمیان لر اور لو کے واقع ہو

لر اور لو کو بجائی لا کے متواتر رکھو تو

ج (لر) = (لر − ا) (لر − ب) (لر − س) . . . (لر − ک) مر (لر)

ح (لو) = (لو − ا) (لو − ب) (لو − س) . . . (لو − ک) مر (لو)

اب تمام اجزاء ضربی لر − ا اور لر − ب اور لر − ح . . . لر − ک مثبت ہین اور تمام اجزاء ضربی لو − ا اور لو − ب اور لو − ح . . . لو − ک منفی ہین اور مر (لر) اور مر (لو) کی ایک ہی علامت ہی اسیواسطے ح (لو) اور ح (لو) متحد العلامت ہونگے اگر ا و ب و ح . . . ک قیمتون کا شمار جفت ہو اور مختلف العلامت ہونگی اگر قیمتون کا شمار طاق ہو

(٩٩) اسی معلوم ہوا کہ ح (لا) مین بجای لا کی دو مقدار متواتر رکہین اور اوتسی نتایج مختلف العلامت پیدا ہون توان دو مقدارون کی درمیان مساوات ح (لا) = ٠ کی قیمتین جنکا شمار طاق ہو واقع ہونگین اور اگر اونسی نتایج متحد العلامت پیدا ہون توان دو مقدارون کے درمیان مساوات مذکور کی کوئی قیمت نہین واقع ہوگی یا ایسی قیمتین واقع ہونگین جنکا شمار جفت ہو

اس نتیجہ کی خاص صورت دفعہ ١٩ کا نتیجہ ہے

(١٠٠) اس بات پر بہی خیال کرنا چاہئی کہ دفعہ ٩٨ کے اثبات مین یہہ ضرور نہین ہے کہ قیمتین ا و ب و ح . . . ک سب غیر مساوی ہون اس بات کو یاد رکہنا چاہئی کہ جو قیمت م دفعہ آئی ہو اوسکو م قیمتین شمار کرتے ہین

ہم لکہہ آئی ہین کہ اگر ح (لر) اور ح (لو) متحد العلامت ہون تو مساوات ج (لا) = ٠ کی کیا تو کوئی قیمت درمیان لر اور لو کے نہین واقع ہوگی یا واقع ہونگین تو اونکا شمار جفت ہوگا

اس باب کے اوپر کی دفعات مین بعض اوقات ہم اس قسم کی دلیل کو کام مین لاتی ہین کہ لو یا کوئی اور بڑی اوسی قیمت لا کی ج (لا) کو مثبت بناتی ہی اسواسطی مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتون کی اعلی حد غائی لو ہی اس بات کو خوب خیال مین رکھنا چاہیے کہ جہان ہم نی یہہ لکھا ہی کہ ج (لا) کو مثبت بناتی ہی تو اوسی مطلب ہمارا یہہ ہی کہ ج (لا) کو مثبت مقدار بناتی ہی اوسکو صفر نہین بناتی مثلاً اگر ج (لا) = (لا − ۴)^۲ (لا − ۱) مین لا بڑا بہ نسبت واحد کی ہو تو ج (لا) منفی نہین ہونے کا لیکن اسی یہہ نتیجہ نہین نکالنا چاہیئی کہ واحد اعلی حد غائی مثبت قیمتون کی ہی اسواسطے کہ ۴ ایک قیمت موجود ہے پس اگر ہم کو صرف یہہ معلوم ہو کہ کوئی قیمت لا کی بڑی بہ نسبت لو کی ح (لا) کو منفی نہین بنا سکتی تو اوسی یہہ نتیجہ نہین نکالنا چاہیئی کہ لو سی کوئی بڑی قیمت نہین ہی مگر اوسی یہہ نتیجہ نکالنا چاہیئی کہ کیا لو کوئی قیمت نہین اور اگر کوئی ایک قیمت یا کئی قیمتین ہین تو وہ جفت مرتبہ مکرر آئی ہین

(۱۰۱) اب ہم ایک بڑا مسئلہ یہہ لکھتی ہین کہ مساوات ج (لا) = ۰ اور حَ (لا) = ۰ کی قیمتون مین کیا ارتباطات ہین یہان حَ (لا) اول جملہ مشتقہ ج (لا) کا ہی اس مسئلہ کو کبھی رول کا ضابطہ بھی کہتی ہین کیونکہ سب سے پہلی اس مسئلہ کا وہ موجد تھا

(۱۰۲) مساوات حَ (لا) = ۰ کی ایک حقیقی قیمت مساوات ح (لا) = ۰ کی دو متصل کی حقیقی قیمتون کے درمیان واقع ہوتی ہے

فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی حقیقی قیمتین بلحاظ مقدار کی بہ ترتیب تصاعیدی جبر مقابلہ کے موافق لکھی گئی ہین اور ا، ب، س، ۰۰ ک سی تعبیر ہوتی ہین اور فرض کرو کہ سر (لا) حاصل ضرب درجہ دوم کی اجزا ضربی کا موافق خیالی قیمتوں مساوات ج (لا) = ۰ کے ایسا ہے کہ سر (لا) اپنی علامت نہین بدل سکتا پس بموجب دفعہ ۳۴ کے

ح (لا) = (لا − ا) (لا − ب) (لا − س) ۰ ۰ ۰ (لا − ک) سر (لا)

اس متطابقہ مین لا کی جگہہ د + ی رکھو تو

ج (د + ی) = (د + ی − ا) (د + ی − ب) ۰ ۰ ۰ (د + ی − ک) سر (د + ی)

اب فرض کرو کہ اس مساوات کی ہر رکن کی صورت منفصلہ قواعد متصاعدہ میں لکھی جاوے تو امثال ح کی دائیں طرف ح (ی) ہوگا دفعہ ۱۲ کو دیکھو اور امثال ح کی بائیں طرف

[(ی-ب) (ی-س) ۔ ۔ ۔ (ی-ک) + (ی-ب) (ی-س) ۔ ۔ ۔ (ی-ک) + ۔ ۔] سر(ی)

\+ (ی-ا) (ی-ب) (ی-س) ۔ ۔ ۔ (ی-ک) سر(ی)

ہوگا ان ح کی امثال کو برابر لکھو اور ی کو لا سے بدل کر مساوات میں لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ح(لا) = [(لا-ب) (لا-س) ۔ ۔ (لا-ک) + (لا-ا) (لا-س) ۔ (لا-ک)] سرلا

\+ (لا-ا) (لا-ب) (لا-س) ۔ ۔ (لا-ک) سرلا

اب متواتر ا ب و س ۔ ۔ ک کو لا کی جگہ رکھو تو آخر رقم مساوات کی بائیں طرف کی ہر صورت میں معدوم ہو جائیگی اور سیوا سطی علامتیں ح (ا) اور ح (ب) اور ح (س)

۔ ۔ ح (ک) کی وہی علامتیں ہیں جو (ا-ب) (ا-س) ۔ ۔ ۔ (ا-ک) و (ب-ا) (ب-س) ۔ ۔ ۔ (ب-ک)

۔ ۔ (ک-ا) (ک-ب) (ک-س) ۔ ۔ ۔ اور یہہ علامتیں علی التبادل مثبت اور منفی ہیں یعنی ایک مثبت دوسری منفی پہر تیسری مثبت اور چوتہی منفی اور علی ہذا القیاس اسواسطے کہ اول جملہ کا کوئی جز ضربی منفی نہیں ہی اور دوسری جملہ کا ایک جز ضربی منفی ہی اور تیسری جملہ میں دو اجزا ضربی منفی ہیں اور علی ہذا القیاس اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۹۹ کی مساوات ح (لا) = ۔ کی قیمتیں جنکا شمار طاق ہو مساوات ح (لا) = ۔ کے متصل کی قیمتوں کے درمیان واقع ہیں

(۱۰۳) دفعہ گذشتہ میں قیمتیں ا و ب و س ۔ ۔ ک سب باہم غیر متساوی ہیں اب فرض کرو کہ قیمت ا مکرر م دفعہ اور قیمت ب مکرر ص دفعہ اور قیمت س مکرر ط دفعہ اور علی ہذا القیاس ہے تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ح(لا) = $(لا-ا)^{م}$ $(لا-ب)^{ص}$ $(لا-س)^{ط}$ ۔ ۔ ۔ سر(لا)

ح(لا) = سر(لا) [م $(لا-ا)^{م-۱}$ $(لا-ب)^{ص}$ $(لا-س)^{ط}$ ۔ ۔ ۔ + ص (لا-ا) $(لا-ب)^{ص-۱}$ $(لا-س)^{ط}$ ۔ ۔ + ۔ ۔ ۔

\+ $(لا-ا)^{م}$ $(لا-ب)^{ص}$ $(لا-س)^{ط}$ ۔ ۔ سر(لا)

فرض کرو ح۱(لا) وفق اعظم ح (لا) اور حَ (لا) کا ہی یعنی یہہ فرض کرو کہ

ح۱(لا) = (لا – ا)^ر–۱ (لا – ب)^ص–۱ (لا – س)^ط–۱ . . .

تو حَ (لا) / ح۱(لا) = سر(لا) [ر(لا – ب) (لا – س) . . . + ص (لا – ا) (لا – س) . . . + . . .]

+ (لا – ا) (لا – ب) (لا – س) . . . سرَ(لا)

اس جملہ کو ح(لا) سے تعبیر کرو تو موافق سابق کی یہہ تحقیق ہوگا کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمتیں جنکا شمار طاق ہو ا اور ب کی درمیان اور دوسرے قیمتیں جنکا شمار طاق ہو ب اور س کی درمیان اور علی ہذا القیاس واقع ہیں اور چونکہ حَ (لا) = ح۱ (لا) ح (لا) ہم کو حاصل ہی تو جسوقت ح (لا) معدوم ہوگا تو حَ (لا) بہی معدوم ہوگا پس مساوات حَ (لا) = ۰ کی قیمتیں جنکی تعداد طاق ہو مساوات ح (لا) = ۰ کی ہر دو متصل کی غیر مساوی قیمتوں کی درمیان واقع ہیں

مساوات ح (لا) = ۰ کی مساوی قیمتوں کی نسبت ہم یہہ جانتی ہیں کہ قیمت ا جو ر دفعہ مساوات ح (لا) = ۰ میں اتی ہی وہ ر – ۱ دفعہ مساوات حَ (لا) = ۰ میں اتی ہی اور علی ہذا القیاس اور قیمت ب جو ص دفعہ مکرر مساوات ح (لا) = ۰ میں اتی ہی ص – ۱ دفعہ مساوات حَ (لا) = ۰ میں مکرر اتی ہے اور علی ہذا القیاس

اسمین بڑی اسانی ہوگی کہ ہم یوں خیال کریں کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت ا کی برابر جو قیمتیں ہوں اونمیں ر – ۱ تو ایسی ہوتی ہیں کہ اونمیں سی ہر یک میں حَ (لا) = ۰ کی قیمت ا کی مکرر واقع ہوتی ہی اور یہی کیفیت اور مکرر قیمتوں کی ہی پس اس خیال سی ہم کو یقین واثق ہوجائیگا کہ دفعہ ۱۰۲ کا دعوی عام ہی خواہ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتیں برابر ہوں یا نا برابر

(۱۰۴) مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت سی زیادہ قیمتیں مساوات حَ (لا) = ۰ کی کوئی سی دو متصل کی قیمتوں کے درمیان نہیں واقع ہوسکتیں اسواسطی کہ اگر ایک قیمت سی زیادہ قیمتیں واقع ہوں تو ایک قیمت باقی قیمتیں مساوات حَ (لا) کی اونکی درمیان واقع ہونگیں تو مساوات حَ (لا) = ۰ کی قیمتیں جو بموجب فرض کے متصلہ تہیں متصلہ نہ رہیں

اور ایسی ہی مساوات حَ (لا) = ۰ کی سب سی بڑی قیمت سی بڑی قیمت مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک ہی ہوسکتی ہی اور مساوات حَ (لا) = ۰ کی سب سے چھوٹی قیمت سی چھوٹی قیمتین بہت سی ہوسکتی ہین

(۱۰۵) اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی سب قیمتین حقیقی ہوں تو مساوات حَ (لا) = ۰ کی بھی سب قیمتین حقیقی ہونگین اسواسطی کہ دوسرے مساوات پہلی مساوات سی درجہ مین ایک کم ہے اور ہر ایک قیمت دوسری مساوات کی پہلی مساوات کی دو متصل کی قیمتوں کی درمیان واقع ہی اور علی العموم اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی م حقیقی قیمتین ہوں تو مساوات حَ (لا) کی یقینی م - ۱ حقیقی قیمتین ہونگین اور اسی زیادہ بھی قیمتین ہوسکتی ہین

(۱۰۶) چونکہ حً (لا) اول جملہ مشتقہ حَ (لا) کا ہی تو مساوات حً (لا) = ۰ کی قیمتین جنکا شمار طاق ہو وہ مساوات حَ (لا) = ۰ کی ہر دو متصل کی قیمتوں کی درمیان واقع ہونگین پس اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی م حقیقی قیمتین ہوں تو مساوات حَ (لا) = ۰ کی کم از کم م - ۱ حقیقی قیمتین اور مساوات حً (لا) = ۰ کی کم از کم م - ۲ حقیقی قیمتین ہونگین اسی طریقہ کے مراعت سی یہہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی م حقیقی قیمتین ہوں تو مساوات حَ (لا) = ۰ کی کم از کم م - ر حقیقی قیمتین ہونگین

اسی معلوم ہوا کہ اگر مساوات حَ (لا) = ۰ کی لو خیالی قیمتین ہوں تو مساوات ح (لا) = ۰ کی کم از کم لو خیالی قیمتین ہونگین اسواسطی کہ اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی لو خیالی قیمتوں سی کم قیمتین ہوں تو اسکی ن - لو حقیقی قیمتوں سی زیادہ قیمتین ہونگین ن درجہ مساوات کا ہی پس مساوات حَ (لا) = ۰ کی ن - لو - ر حقیقی قیمتوں سی زیادہ قیمتین ہونگین اور چونکہ یہہ مساوات ن - ر درجہ کی ہے اسلیئی اسکی لو قیمتین خیالی نہین ہوسکتین اور یہہ خلاف فرض کے ہے

مثلاً فرض کرو کہ ح (لا) = لاٹ (۱ - لا)ن

مساوات ح (لا) = ۰ کی تمام اصلی قیمتین ہین یعنی ن ہر ایک صفر کے ہی یا برابر ا کی ہی اسی معلوم ہوا کہ مساوات حٹ (لا) = ۰ کی تمام ن اصلی قیمتین درمیان ۰ اور ا کی واقع ہونگین اور یہہ مساوات یہہ ہے کہ

٠ = ١ - ن/١ . (ن+١)/١ لا + ن(ن-١)/(١×٢) . (ن+١)(ن+٢)/(١×٢) لا^٢ - . . . .

(١٠٧) اگر مساوات ح (لا) = ٠ کی تمام حقیقی قیمتین معلوم ہون تو مساوات ح (لا) = ٠ کی نسبت یہہ تحقیق کرسکتی ہین کہ اوسکی اصلی قیمتین کتنی ہین فرض کرو کہ مساوات حَ (لا) = ٠ کی قیمتین سہ و صہ و لہ . . . کہ بہ ترتیب تنازلی بلحاظ مقدار کی جبر و مقابلہ مین مرتب کیجائین اور ح (لا) مین لا کی جگہہ سہ و صہ و لہ . . . کو متواتر رکہو اور جو نتایج حاصل ہون اونکی علامتون پر خیال کرو اگر نتایج مختلف العلامت ہونگی تو مساوات ح (لا) = ٠ کی ایک قیمت ان قیمتون مین سی دو متصل کی قیمتون مین واقع ہونگین اور اگر متحد العلامت ہونگی تو کوئی قیمت دو متصل کی قیمتون کے درمیان نہین واقع ہونگین دفعات ٩٨ اور ١٠٤ کے دیکہو

مساوات ح (لا) = ٠ کی ایک قیمت بڑی جبر و مقابلہ مین بہ نسبت سہ کی ہوگی اگر ح (سہ) منفی ہو اور کوئی قیمت بڑی نہ ہوگی تو ح (سہ) مثبت ہوگا اور اگر مساوات جفت درجہ کی ہو اور ح (کر) منفی ہو تو جبر و مقابلہ مین مساوات کی ایک قیمت کم بہ نسبت کر کی ہوگی یا اگر مساوات طاق درجہ کی ہو اور ح (کر) مثبت ہو اور یہہ بات کسی اور طرح سی نہین ہوگی دفعات ٩٨ اور ١٠٤ کی دیکہو

اسی معلوم ہوا کہ ح (لا) مین بجای لا کی متواتر + ∞ و سہ و صہ و لہ . . . کر و -∞ کو رکہتی سی جو سلسلہ پیدا ہوگا اوسمین جتنی تعداد تغیرات علامت کی ہوگی اوتنی ہی مساوات ح (لا) = ٠ کی حقیقی قیمتون کا شمار ہوگا لیکن اگر ح (لا) مین ان قیمتون کی رکہنی سی ح (لا) معدوم ہوجائیگا تو اوسی یہہ دریافت ہوگا کہ مساوات ح (لا) = ٠ کی برابر قیمتین ہونگین اور تعداد اونکی بایشتم سی دریافت ہوسکتی ہے

(١٠٨) تمثیلاً اس بات کو تحقیقات کرتی ہین کہ مساوات لا^٣ - ن لا + ر = ٠ کی تمام قیمتون کی ممکن ہونی کی لئی کیا شرایط ہونی چاہئین

ق کو مثبت مقدار فرض کرو یہان حَ (لا) = ٣ لا^٢ - ق تو مساوات حَ (لا) = ٠ کی قیمتین ± √(ق/٣) ہین اور فرض کرو کہ سہ = + √(ق/٣) اور صہ = - √(ق/٣)

تو ح (سہ) = + (ق/٣)^(٣/٢) - ق (ق/٣)^(١/٢) + ر = -٢ (ق/٣)^(٣/٢) + ر

$$ح(صہ) = -\left(\frac{ق}{۳}\right)^{\frac{۳}{۲}} + ق\left(\frac{ق}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}} + ر = ۲\left(\frac{ق}{۳}\right)^{\frac{۳}{۲}} + ر$$

اول فرض کرو کہ $\left(\frac{ر}{۲}\right)^{۲}$ بڑا $\left(\frac{ق}{۳}\right)^{۳}$ سی ہو پس اگر ر مثبت ہو تو ح (سہ) اور ح (صہ) دونو مثبت ہونگی اور مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک حقیقی قیمت ہوگی اور وہ جبر مقابلہ مین چہوٹی بہ نسبت صہ کی ہوگی اور اگر ر منفی ہو تو ح (سہ) اور ح (صہ) دونو منفی ہونگے اور مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک حقیقی قیمت ہوگی جو سہ سی بڑی ہوگی

اب فرض کرو کہ $\left(\frac{ر}{۲}\right)^{۲}$ چہوٹا $\left(\frac{ق}{۳}\right)^{۳}$ سی ہو تو ح (سہ) منفی ہی اور ح (صہ) مثبت ہی اور مساوات ح (لا) = ۰ مین تینون حقیقی قیمتین ہین یعنی ایک بڑی سہ سی اور ایک سہ اور صہ کے درمیان اور ایک چہوٹی صہ سی جبر مقابلہ مین

(۱۰۹) مساوات کی حقیقی قیمتون کے مقام دریافت کرنی کی ترکیب ڈارنگ صاحب نی اول ایجاد کی اور لاگرانج نی اوسمین پہر دوبارہ جان ڈالی اوسکو قیمتون کے علیحدہ کرنی کی ترکیب ڈارنگ صاحب کی کہتی ہین فرض کرو کہ ہم کو مساوات کی برابر قیمتین معلوم ہوگئین ہین اور ہم نی اوسکی موافق جو اجزا ضربی تہے اونکو مساوات سی خارج کر دیا ہی اور ایسی مساوات حاصل کر لی ہی کہ اوسکی قیمتین غیر مساوی ہین اور ایسی مساوات پر بحث ہی اور اوسکو مساوات ح (لا) = ۰ سی تعبیر کرتی ہین فرض کرو کہ ک ایک مقدار ہو جو ہر دو قیمتون کی تفاوت سی کم ہی اور ص علی حد غائی مثبت قیمتون کی ہی اب ح (لا) مین بجائے لا کی ص و ص − ک و ص − ۲ ک و ص − ۳ ک . . . رکہو اور یہہ نوبت اوس مقدار تک پہونچاؤ جو الجبرا مین مساوات کی سب سے چہوٹی قیمت سی بہی چہوٹی قیمت ہو اور جو نتایج حاصل ہون اونکی سلسلہ کی علامتون پر نظر ڈالو پس جب ایک تغیر علامت واقع ہوگا تو جو دو قیمتون کی رکہنی سی یہہ تغیر پیدا ہوا ہی اونکی درمیان ایک قیمت مساوات کی ہوگی اور جب ایک تواتر علامت واقع ہوگا تو جن دو قیمتون کی رکہنی سی یہہ تواتر پیدا ہوا ہی اونکی درمیان کوئی قیمت مساوات کی نہین ہوگی مگر اب ہم کو اس بات پر توجہ کرنی چاہیی کہ ک کو کسطرح تحقیق کرتی ہین فرض کرو کہ ایک مساوات ایسی بنائی گئی ہی کہ جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی ہر دو قیمتون کے تفاوت کی مجذور کی برابر ہون اور اس مساوات

کی مثبت قیمتون کی ادنی حد غائی دریافت ہوئی ہی اوسکو فرسی تغیر کرو تو ہ فرقیمت مناسبک کی ہوگی

دفعہ ۷۰ مین ہم نی ایک مثال لکہی ہی کہ کسطرح ایک مساوات بنتی ہی کہ جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کے قیمتون کے تفادت کی مجذور کی برابر ہوتی ہین اور اس مثال پر کیا موقوف ہی ہم علی العموم ایندہ اوسپر بحث کرینگے وارنگ صاحب کی ترکیب ایسی پیچیدہ ہی کہ وہ تیسرے درجہ کی مساوات سی زیادہ درجہ کی مساوات مین عمل مین لانی سی کچہہ فائدہ نہین دیتی اونسی نتیجی پیچ در پیچ پیدا ہوتی ہین کہ اونکا کہولنا دشوار ہی غرض یہہ ترکیب عملیات مین توکسی کام کی نہین مگر نظریات مین اوسسے مطلب حاصل ہوجاتا ہے

(۱۱۰) تمثیلاً وارنگ صاحب کے ترکیب کے لئی یہہ مساوات

لا³ − ۳ لا² − ۴ لا + ۱۳ = ۰ لو

بموجب دفعہ ۷۰ کی وہ مساوات جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون کی تفاوت کی مجذور ہون یہہ ہے

د³ − ۴۲ د² + ۴۴۱ د − ۴۹ = ۰

د کی جگہہ ۱/ی رکہو تو ۴۹ ی³ − ۴۴۱ ی² + ۴۲ ی − ۱ = ۰

یعنی ۴۹ ی² (ی − ۹) + ۴۲ (ی − ۱/۴۲) = ۰

اب ۹ اعلی حد غائی ی کی قیمتون کی ہی اسیواسطے ادنی حد غائی ۱/۹ ہوگی

اسی معلوم ہوا کہ √(۱/۹) یعنی ۱/۳ مساوات مفروضہ کی ہر دو قیمتون کے تفاوت سی کم ہے

اسیطرح بموجب دفعہ ۸۷ کی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتون کی اعلی حد غائی ۴ + ۱ یعنی ۵ ہی اور بموجب دفعات ۹۴ و ۹۵ کے مساوات مفروضہ کی منفی قیمتون کی اعلی حد غائی تعداد

− (۱ + √۴) ہی پس مساوات مفروضہ کی تمام قیمتین ۵ اور −۳ کے درمیان واقع ہوتی ہین

اب لا کی قیمتین ۵ اور ۵ − ۱/۳ اور ۵ − ۲/۳

متواتر رکہنی سی یہہ دریافت ہوگا کہ ایک قیمت ۳ اور ۲ ۲/۳ کی درمیان اور ایک قیمت ۲ ۲/۳ اور ۲ ۱/۳ کی درمیان اور ایک قیمت −۲ اور −۲ ۱/۳ کے درمیان واقع ہوگی

(۱۱۱) اب ہم اس باب کو ایک دعوی پر ختم کرتی ہین اور یہہ دعوی اون اصول کی ایک مثال ہی جو ابہی ہمنی ثابت کئی ہین

مساوات ح (لا) = ۰ مین جسمین

$$ح(لا) = ع\,لا^{ن} + ع_{1}\,لا^{ن-1} + \dots + لا - ر$$

مین اگر ق کی عددی قیمت تعداد مین سب سے بڑا اسر ہو اور ر مثبت اور $\frac{1}{2+4ق}$ سی کم ہو تو ایک حقیقی قیمت ۲ر سی چھوٹی ہوگی

جب لا صفر ہو تو ح (لا) منفی ہی تو لا کی مثبت قیمت ح (لا) کو مثبت بنائیگی اور بدرجہ اولی مثبت بنائینگے اگر وہ

$$لا - ر - ق\,(لا^{ن} + لا^{ن-1} + \dots + لا^{3} + لا^{2})$$

کو مثبت بنائینگے یعنی اگر وہ $لا - ر - ق\,لا^{2}\,\frac{1 - لا^{ن-1}}{1 - لا}$ کو مثبت بنائینگے

اسی معلوم ہوا کہ اگر لا بہ نسبت واحد کی کم ہو اور $(1-لا)(لا-ر) - ق\,لا^{2}$ مثبت ہو تو ح (لا) بدرجہ اولی مثبت ہوگا اب لا کی جگہہ ۲ر اخر جملہ مین رکھو تو وہ $ر\,[1 - 2ر - 4ق\,ر]$ ہو جائیگا اور یہہ مثبت ہی کیونکہ بموجب فرض کی ر (۲+۴ق) چھوٹا بہ نسبت واحد کی ہی پس ح (لا) مثبت ہی جب لا = ۲ر ہو اور ح (لا) منفی ہی جب لا = ۰ اسیواسطے مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ۰ اور ۲ر کے درمیان واقع ہوتی ہے

اسیطرح اگر اخر رقم ر بجای -ر کے ہو اور ر مثبت ہو اور چھوٹا $\frac{1}{2+4ق}$ سی ہو تو مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ۰ اور -۲ر کے درمیان واقع ہوگی

اٹھوان باب قیمتین محدود اور ناطق

(۱۱۲) قیمت ناطق اور محدود سی مراد اوس قیمت سی ہی جو ایک محدود صورت مین بیان ہو سکے خواہ وہ صحیح ہو یا کسر ہو اور اوسمین مقادیر اصم نہ ہون اب ہم یہہ بتلائینگے کہ مساوات کی امثال جب اعداد ناطق ہون خواہ صحیح یا کسر تو ناطق اور محدود قیمتین مساوات کی اسانی سی دریافت ہو سکتی ہین

دفعہ ۵۳ مین ہم نی بیان کیا ہی کہ اگر مساوات کی امثال ناطقہ ہون اور سب صحیح نہ ہون تو اوس مساوات کی ہئیت بدل کر ایک ایسی مساوات بنا سکتی ہین کہ جسکی سب امثال صحیح ہون

اور مثال اول رقم کا واحد ہو اسواسطے ہم اب اس آخر الذکر مساوات پر بحث کرینگی اور اول ہم بتلاوینگے کہ مساوات تین اوس صورت کی قیمتین بکسور ناطقہ نہین ہوینگی

(۱۱۳) اگر مساوات کی مثال تمام اعداد صحیح ہون اور اوسکی اول رقم کا مثال واحد ہو تو مساوات کی کوئی قیمت بکسور ناطقہ نہین ہوسکتی

فرض کرو کہ مساوات

$$لا^ن + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} \dots + ع_{ن-2} لا^2 + ع_{ن-1} لا + ع_ن = ۰$$

اور اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ قیمت بکسور ناطقہ مختصر الحدین $\frac{ا}{ب}$ ہی اور اوسکو لا کی جگہ مساوات مین رکھو اور سب کو $ب^{ن-1}$ مین ضرب دو تو

$$\frac{ا^ن}{ب} + ع_1 ا^{ن-1} + ع_2 ا^{ن-2} ب + \dots + ع_{ن-2} ا^2 ب^{ن-3} + ع_{ن-1} ا ب^{ن-2} + ع_ن ب^{ن-1} = ۰$$

اور اسیواسطے $-\frac{ا^ن}{ب} = ع_1 ا^{ن-1} + ع_2 ا^{ن-2} ب + \dots + ع_{ن-2} ا^2 ب^{ن-3} + ع_{ن-1} ا ب^{ن-2} + ع_ن ب^{ن-1}$

اب آخر نتیجہ ناممکن ہی اسواسطے کہ بائین طرف کا رکن تو صحیح مقدار ہی اور دائین طرف کا رکن صحیح مقدار نہین ہے اسواسطے مساوات مفروضہ کی قیمت کسر نہین ہوسکتی

(۱۱۴) اسی معلوم ہوا کہ فقط ہم کو تحقیقات اون قیمتون کی کرنی چاہی ہی جو محدود اور ناطقہ اور صحیح ہو اور اب ہم ترکیب اونکی دریافت کرنی کی بیان کرتی ہین اس ترکیب بعض اوقات ترکیب مقسوم علیہون کی کہتی ہین اور بعض اوقات اوسکو نیوٹن صاحب کی ترکیب کہتی ہین

فرض کرو کہ مساوات

$$لا^ن + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} \dots + ع_{ن-2} لا^2 + ع_{ن-1} لا + ع_ن = ۰$$ ہو

اور ا ایک صحیح قیمت ہی اس قیمت کی مندرج کرنی سی اور ارقام کو بہ ترتیب معکوس لکھنی سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$ع_ن + ع_{ن-1} ا + ع_{ن-2} ا^2 + \dots + ع_2 ا^{ن-2} + ع_1 ا^{ن-1} + ا^ن = ۰$$

اسواسطے ا پر تقسیم کرنے سے

$\frac{ع_ن}{ا} + ع_{ن-1} + ع_{ن-2}\,ا + \cdots + ع_2\,ا^{ن-3} + ع_1\,ا^{ن-2} + ا^{ن-1} = 0$

اسی معلوم ہوا کہ $\frac{ع_ن}{ا}$ ایک صحیح عدد ہوا اسکو ق۱ سی تعبیر کرو اور اسکو ا پر تقسیم کرو تو

$ق_1 + ع_{ن-1} + ع_{ن-2}\,ا + \cdots + ع_2\,ا^{ن-4} + ع_1\,ا^{ن-3} + ا^{ن-2} = 0$

اسی معلوم ہوا کہ $\frac{ق_1 + ع_{ن-1}}{ا}$ ایک صحیح عدد ہونا چاہئی اسکو ق۲ سی تعبیر کرو اور پہر ا پر تقسیم کرو تو $\frac{ق_1 + ع_{ن-2}}{ا}$ ایک صحیح عدد ہونا چاہئی اسیطرح عمل کرنی سی ا پر ن دفعہ تقسیم کرنی سے اس نتیجہ پر نوبت پہونچیگی کہ $\frac{ق_{ن-1} + ع_1}{ا} + 1 = 0$

اسی معلوم ہوتا ہی کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ا کی ہونی کی واسطی یہہ شرائط ضرور ہیں کہ اخر رقم مساوات کی ا پر پوری تقسیم ہوتی ہو اور خارج قسمت ہر جو اسطرح حاصل ہو اگر لا کا امثال زیادہ کیا جاے تو حاصل جمع بہی ا پر پورا تقسیم ہو اور اسطرح جو خارج قسمت حاصل ہو اور لا۲ کا سر جو مساوات میں ہی زیادہ کریں تو حاصل جمع ایسا حاصل ہو کہ وہ ا پر پورا تقسیم ہو اور اسیطرح عمل کئی جائیں جب تک کہ ن-۱ تقسیموں پر نوبت پہونچی اور خارج قسمت جو حاصل ہو اوسپر لاَن-۱ کا سر زیادہ کرو تو حاصل جمع پورا ا پر تقسیم ہو اور خارج قسمت -۱ ہو

اگر ان تمام مراتب میں سی کسی مرتبہ پر شرط مطلوب ٹوٹ جاے تو جان لینا چاہئی کہ صحیح عدد ا قیمت مساوات کی نہیں ہی

(۱۱۵) ہم نی دفعہ گذشتہ میں اون شرائط کو دریافت کیا ہی کہ جنکی موافق صحیح عدد ا مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت بنتا ہی اب یہہ بات اسانی سی دریافت ہوتی ہی کہ اگر ان شرائط میں سی اخر شرط پوری ہو تو صحیح عدد ا قیمت مساوات کی ہوگا اسواسطے کہ اخر شرط اسطرح تعبیر ہوتی ہی کہ

$\frac{ع_ن}{ا^ن} + \frac{ع_{ن-1}}{ا^{ن-1}} + \frac{ع_{ن-2}}{ا^{ن-2}} + \cdots + \frac{ع_2}{ا^2} + \frac{ع_1}{ا} = -1$

اب اگر یہہ صحیح ہو تو اَن میں ضرب دینی سی مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت ا کا ہونا ظاہر ہے مساوات کی تمام محدود اور ناطق قیمتوں کی دریافت کرنی کی واسطی اخر رقم کے تمام پوری بانٹنی والی مقداریں دریافت کریں اور اس بات کو جانچیں کہ وہ شرائط دفعہ ۱۱۴ کو پورا کرتی

ہین اس امتحان کی محنت کم ہوجاویگی اگر ہم اول مثبت اور منفی قیمتون کی حد غائی دریافت کرین ان حدود غائی کی دریافت کرنی سی اون صحاح پر آزمائش کی ضرورت نہین رہیگی جو ان حدود غائی سی باہر ہون فقط انہین اعداد کی آزمائش کرنی پڑیگی جو ان حدود غائی کی درمیان واقع ہونگی

(۱۱۶) تمثیلاً اس مساوات کو لو کہ

$$لا^{۵} + ۵ لا^{۴} + لا^{۳} - ۱۶ لا^{۲} - ۲۰ لا - ۱۶ = ۰$$

یہان بموجب دفعہ ۸۹ کی $۱ + \sqrt[۳]{۲۰}$ اعلی حد غائی ہی اور لا کی جگہ ی لکھنی سی یہ مساوات حاصل ہوتی ہی

$$ی^{۴}(ی - ۵) + ی^{۳} + ۱۶ ی (ی - \frac{۵}{۴}) + ۱۶ = ۰$$

اسمین ۵ اعلی حد غائی مثبت قیمتون کی ہی اسی معلوم ہوا کہ تمام مثبت قیمتین مساوات کی ۴ اور −۵ کی درمیان واقع ہوتی ہین اور −۱۶ کی پوری بانٹنی والی صحاح ان حدود غائی کی درمیان جو واقع ہین اب ان اعداد کا امتحان کرتی ہین کہ کونسی اونمین سی قیمتین ہین

−۴	−۲	−۱	۱	۲	۴
+۴	+۸	+۱۶	−۱۶	−۸	−۴
−۱۶	−۱۲	−۴	−۳۶	−۲۸	−۲۴
+۴	+۶	+۴	−۳۶	−۱۴	−۶
−۱۲	−۱۰	−۱۲	−۵۲	−۳۰	−۲۲
+۳	+۵	+۱۲	−۵۲	−۱۵	
+۴	+۶	+۱۳	−۵۱	−۱۴	
−۱	−۳	−۱۳	−۵۱	−۷	
+۴	+۲	−۸	−۴۶	−۲	
−۱	−۱	+۸	−۴۶	−۱	

اول سطر مین وہ پوری بانٹنی والی اخیر رقم کی لکھی ہین جنکا امتحان منظور ہے اور ہر ایک بانٹنی والی کی نیچی وہ نتایج لکھی ہین جو اوسکی امتحان سے پیدا ہوتی ہین مثلاً پورا بانٹنی والا ۴ ہے اخیر رقم −۱۶ کو ۴ پر تقسیم کرتی ہین اور خارج قسمت −۴ کو اوسکی نیچی لکھتی ہین اب اسکو لا کی سر −۲۰ سے زیادہ کرتی ہین اور حاصل جمع −۲۴ کو نیچی لکھتی ہین اب اسکو ۴ پر تقسیم کرنی سی −۶ خارج قسمت نکلتا ہے

اسلو بہی لکھتی ہین اور سب سر لا کا -۱۹ زیادہ کرتی ہین تو -۲۲ حاصل ہوتی اور یہہ ۴ پر تقسیم نہین ہوتا اسی معلوم ہوا کہ ۴ قیمت نہین ہے ۲ اور -۲ اور -۴ کی موافق تمام شرائط پوری ہوتی ہین اسلئی یہی اعداد قیمتین مساوات کی ہین اور ۱ اور -۱ سے پچہلی شرط کو پورا نہین کرتے یعنی اخر خارج قسمت -۱ نہین ہی اسواسطی یہہ اعداد قیمتین نہین ہین

پس مساوات مفروضہ کو ح (لا) = سی تعبیر کرین تو یہہ دریافت ہوگا کہ (لا-۲) (لا+۲) (لا+۴) ایک جز ضربی ح (لا) کا ہی اور اسی یہہ معلوم ہوگا کہ دوسرا جز ضربی لا² + لا + ۱ ہے

(۱۱۷) اکثر +۱ اور -۱ کو پوری باٹنی والون مین نہین امتحان کرتے کیونکہ اونکا یہہ امتحان کرنا کہ وہ قیمتین ہین یا نہین اسطرح اسان ہی کہ اونکو لا کی جگہ مساوات معلوم مین رکہہ کر دیکہہ لین اگر کوئی قوت لا کی مساوات مفروضہ مین سی مفقود ہو تو اوسکی جگہ اوسی قوت کو لکہو اور صفر اوسکا سر بنا لو دفعہ ۱۵ دیکہو

جیسا اس ترکیب سے خاص اعداد ا و ب و س ... محدود اور ناطق قیمتین مساوات ح (لا) = ۰ کی ہوون تو یہہ تحقیق کرنا باقی رہا ہی کہ یہہ قیمتین مکرر اتی ہین ح (لا) کو حاصل ضرب (لا-ا) (لا-ب) (لا-س) ... پر تقسیم کرین اور اس خارج قسمت کو سر (لا) سی تعبیر کرتی ہین اور پہر مساوات سر (لا) = ۰ پر اس ترکیب کو عمل مین لائین اسی طریقہ کے مراعت سی مساوات ح (لا) = ۰ کی مکرر قیمتین دریافت ہوسکتی ہین اور یہہ معلوم ہوسکتا ہی کہ ہر ایک قیمت مکرر کتنی دفعہ اتی ہے

ح (لا) = ۰ کی مساوی قیمتون کی ازمایش باب چہارم سے ہوسکتی ہے

(۱۱۸) دفعہ ۱۱۴ مین جو مساوات لی گئی ہی اوسکی اول رقم کا سر واحد ہے اگر اس مساوات کی جگہ ایسی مساوات لین کہ جسمین کوئی سر صحیح ع اول رقم کا ہو تو شرائط متصلہ مین فقط اخر خارج قسمت مین یہہ فرق پڑیگا کہ -۱ کی جگہ -ع حاصل ہوگا مثلاً فرض کرو کہ

۲لا³ - ۱۲لا² + ۱۳لا - ۱۵ = ۰

یہان ۱۵/۲ + ۱ اعلی حد غائی مثبت قیمتون کی بموجب دفعہ ۹ کی اور بموجب دفعہ ۲۴ کی کوئی منفی قیمت نہین ہے،

اور امتحان کرنی سی معلوم ہوتا ہی کہ ا قیمت نہیں ہی پس آخر رقم کی پوری باٹنی والی ۵ اور ۳ ہیں
تو انکی ترتیب یہہ ہوگی کہ

۵	۳
−۳	−۵
۱۰	۸
۲	
−۱۰	
−۲	

پس ۵ قیمت ہی اسواسطے کہ اوسی تمام شرائط پوری ہوتی ہین آخر خارج قسمت −۲ ہے
اور ۳ قیمت نہین کیونکہ ۸ پورا ۳ پر تقسیم نہین ہوتا

(۱۱۹) آخر رقم کی پوری باٹنی والون کا شمار اصول مفصلہ ذیل کی موافق ہی ہوسکتا ہے
فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت ا ہو لا کی جگہ م + ر رکہو تو ا − م ایک قیمت
ر کی ایسی ہوگی جو مساوات ح (م + ر) = ۰ کی شرائط کو پورا کریگی جو رقم ر سے
کچھہ لگاؤ نہین رکھتی وہ ح (م) ہی اور تمام امثال ر کی صحیح ہین اگر ح (لا) کی سب امثال
صحیح ہون اور م بہی صحیح ہو دفعہ ۱۲ کو دیکھو پس اگر ا صحیح ہو تو ا − م بہی صحیح ہوگا اور
اسواسطے ح (م) کو بموجب دفعہ ۱۱۴ کی تقسیم کریگا پس کوئی صحیح مقدار ا
جو آخر رقم ح (لا) کو پورا باٹتی ہو اور ح (م) کو ا − م نہ پورا تقسیم کرتی ہو تو وہ
مقدار خارج از امتحان ہوسکتی ہے

یہان م کوئی صحیح منفی اور مثبت ہوسکتا ہی ۰ +۱ اور −۱ قیمتین اوسکی مقرر کرنی سی ح (م)
کے حساب مین بڑی آسانی ہوجاتی ہے

دفعہ ۱۱۶ کی مساوات معلوم کو تمثیلاً لو یہان ۴ آخر رقم کو پورا باٹتا ہے لیکن
۴ + ۱ پورا ح (−۱) کو جو ۹ ہی نہین تقسیم کرتا ہی اسلئی یہہ قیمت مساوات کی نہین ہوسکتی

اب یہہ مثال لا³ − ۲۰ لا² + ۱۶۴ لا − ۴۰۰ = ۰ کی کوئی اس مساوات کی منفی قیمت بموجب
دفعہ ۲۴ کی نہین ہی اور اوسکو اس صورت لا² (لا − ۲۰) + ۱۶۴ (لا − ۴۰۰/۱۶۴) مین لکھنی سے

ہم دیکہتے ہیں کہ ۲۰ اعلی حد عائی مثبت قیمتوں کی ہے اخر رقم کی مثبت پوری بانٹنی والے جو ۲۰ سے کم ہوں ۲ و ۴ و ۵ و ۸ و ۱۰ اور ۱۶ ہیں انمیں سی ۵ و ۸ و ۱۰ قیمتیں نہیں ہیں اسلیے کہ ح (۱) = -۵۵ ۲ اور یہہ ۵-۱ یا ۸-۱ یا ۱۰-۱ پر پورا نہیں تقسیم ہوتا

پس اخر رقم کی پورا بانٹنی والی امتحان کے واسطے ۲ و ۴ اور ۱۶ ہیں انمیں سی معلوم ہوگا کہ ۴ قیمت ہے

(۱۲۰) ایک مثال قیمت مکسور ناطق کی یہہ مساوات ۴ لا۴ - ۱۱ لا۲ + ۷ لا - ۶ = ۰ ہے یعنی

لا۴ - ۱۱/۴ لا۲ + ۷/۴ لا - ۳/۲ = ۰

اول مساوات میں لا = ی/۲ کے رکہو تا کہ مساوات ہئیت بدل کے ایسی مساوات ہو جاوے کہ تمام مثال صحیح ہوں دفعہ ۵۳ کو دیکہو پس

ی۴ - ۱۱ ی۲ + ۱۴ ی - ۲۴ = ۰

یعنی ی۴ + ۰ × ی۳ - ۱۱ ی۲ + ۱۴ ی - ۲۴ = ۰

بموجب دفعات ۹۰ اور ۹۴ کے تمام قیمتیں اس مساوات کی درمیان ۱ + √۲۴ اور -(۱ + √۲۴) واقع ہوں اور ہم امتحان سی دریافت کرتی ہیں کہ +۱ اور -۱ قیمتیں ہیں پس صرف پوری تقسیم کرنی والی اخر رقم کی ۴ و ۳ و ۲ و -۲ و -۳ و -۴ ہیں اور نیز ح (۱) = -۲۰ اور یہہ ۴-۱ یا -۲-۱ پر پوری نہیں تقسیم ہوتی اسی معلوم ہوا کہ ۴ اور -۲ خارج الامتحان ہیں اور موافق سابق کی ترتیب عمل کی یہہ ہوگی

-۴	-۳	۲	۳
۶	۸	-۱۲	-۸
۲۰	۲۲	۲	۶
-۵		۱	۶
-۱۶		-۱۰	-۹
۴		-۵	-۳
-۱			-۱

پس ۳ اور -۴ قیمتیں ہیں اور چونکہ لا = ی/۲ تو ۳/۲ اور -۲ قیمتیں اصلی مساوات کی حاصل ہوئیں

نوان باب تنزل معادلات

اس باب مین ہم اس بات کی تحقیقات کرینگے کہ کسطرح سی ایک مساوات کا حل اوسی کم درجہ کی مساوات کے حل پر بعض صورتون مین موقوف ہو سکتا ہی جبکہ اونکی قیمتون کی ارتباط معلوم ہون جس عمل سے یہہ امر دریافت ہوتا ہی اوسکو تنزل معادلات کہتی ہین

(۱۲۲) جب دو مساواتون مین ایک قیمت یا کئی قیمتین مشترک ہون تو اوس قیمت یا قیمتون کو دریافت کرو فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ اور مح (لا) = ۰ مساواتین ہین جنکی ایک قیمت مشترک ا ہے

پس ح (لا) اور مح (لا) مین لا - ا ایک جزضربی مشترک ہوگا ہی معلوم ہوا کہ ح (لا) اور مح (لا) کی وفق مشترک اعظم مین لا - ا ایک جزضربی ہوگا اور علی ہذا القیاس ہر ایک جزضربی مشترک ح (لا) اور مح (لا) کا وفق مشترک اعظم کا ہی جزضربی ہوگا اور کوئی اور جزضربی اس وفق اعظم مین نہین واقع ہوگا پس اسی معلوم ہوا کہ اگر ہم ح (لا) اور مح (لا) کا وفق اعظم دریافت کرین اور اوسکو برابر صفر کے لکھہ دین تو اس مساوات کی قیمتین مطابقت تامہ معادلات ح (لا) = ۰ اور مح (لا) = ۰ کے مشترک قیمتون سے رکھینگے

اگر ح (لا) اور مح (لا) مین کوئی جزضربی مکرر آتا ہی تو وفق اعظم مین بہی مکرر آئیگا

(۱۲۳) تمثیلاً فرض کرو کہ یہہ دو مساواتین ہین

$$لا^4 + ۳لا^3 - ۵لا^2 - ۶لا - ۸ = ۰$$

$$\text{اور} \quad لا^4 + لا^3 - ۹لا^2 + ۱۰لا - ۸ = ۰$$

اب ان مساواتون کی دائین طرف کی ارکان کا وفق اعظم $لا^2 + ۲لا - ۸$ ہی اور اگر اسکو برابر صفر کے لکھین تو لا = -۴ اور لا = ۲ کی حاصل ہوگا

پس دونو مساواتون کی مشترک قیمتین ۲ اور -۴ ہین

(۱۲۴) فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی دو قیمتین ا اور ب ہین جنکا رابطہ باہمی ہم کو یہہ معلوم ہے کہ ع ا + ق ب = ر اب مطلوب یہہ ہی کہ ان قیمتون کو دریافت کرین

چونکہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ا اور ب قیمتیں ہیں تو ح (ا) = ۰ اور ح (ب) = ۰

لیکن ب = $\frac{\text{ر} - \text{ع ا}}{\text{ق}}$ اسیواسطے ح $\left(\frac{\text{ر} - \text{ع ا}}{\text{ق}}\right)$ = ۰

پس معادلات ح (لا) = ۰ اور ح $\left(\frac{\text{ر} - \text{ع لا}}{\text{ق}}\right)$ = ۰ کی مشترک قیمت ا ہے

تو وہ بموجب دفعہ گذشتہ کی دریافت ہوسکتی ہی پس اسطرح تو ا دریافت ہوگیا اور اس ارتباط ع ا + ق ب = ر سی ب دریافت ہوجایگا اسی معلوم ہوتا ہی کہ حاصل ضرب اجزاء ضربی لا − ا اور لا − ب پر ح (لا) پورا تقسیم ہوجایگا اور خارج قسمت کو برابر صفر کی لکھیں تو ایک مساوات ایسی حاصل ہوجائیگی کہ اوسی باقی قیمتیں مساوات ح (لا) = ۰ کی دریافت ہوجائینگیں

(۱۲۵) تمثیلاً فرض کرو کہ یہہ مساوات ہو

لا^{4} − ۷ لا^{3} + ۱۱ لا^{2} − ۷ لا + ۱۰ = ۰ (۱)

اور یہہ ہم کو معلوم ہی کہ اوسکی دو قیمتیں ا اور ب مین ارتباط باہمی یہہ ہی کہ ب = ۲ ا + ۱ مساوات (۱) مین لا کی جگہ ۲ لا + ۱ رکہو تو

(۲ لا + ۱)^{4} − ۷ (۲ لا + ۱)^{3} + ۱۱ (۲ لا + ۱)^{2} − ۷ (۲ لا + ۱) + ۱۰ = ۰

یعنی ۱۶ لا^{4} − ۲۴ لا^{3} − ۱۶ لا^{2} − ۴ لا + ۸ = ۰

یا ۴ لا^{4} − ۶ لا^{3} − ۴ لا^{2} − لا + ۲ = ۰ (۲)

اب معادلات (۱) اور (۲) کی بائین طرف کی ارکان کا ذو ق اعظم لا − ۲ ہے پس ا = ۲ اور اسیواسطے ب = ۵ یعنی مساوات مفروضہ کے دو قیمتیں ۲ اور ۵ ہین تو اسی یہہ دریافت ہوگا کہ

لا^{4} − ۷ لا^{3} + ۱۱ لا^{2} − ۷ لا + ۱۰ = (لا − ۲) (لا − ۵) (لا^{2} + ۱)

پس اور قیمتیں ± $\sqrt{(-1)}$ ہین

(۱۲۶) یہہ ہوسکتا ہی کہ ایک اور زوج قیمتوں کا سہ اور صہ مین یہہ ارتباط ہو کہ ع سہ + ق صہ = ر تو اس صورت مین جملی ح (لا) اور ح $\left(\frac{\text{ر} - \text{ع لا}}{\text{ق}}\right)$ کی ذو ق اعظم مین لا کی دوسرے درجہ کا جملہ کا جسمین اجزاء ضربی لا − ا اور لا − سہ ملتف ہونگی اگر قیمتین ا اور ب دونو مساوات ح (لا) = ۰

مین مکرر آئین تو ح (لا) اور ح (لا) دفق اعظم مین جز ضربی لا - ا مکرر آئیگا

(۱۲۷) علی العموم یہہ فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی دو قیمتین ا اور ب مین باہمی ارتباط یہہ ہی کہ ب = سر (ا) تو معادلات ح (لا) = ۰ اور ح [سر (لا)] = ۰ کی ایک قیمت مشترک ا ہوگی اور اس مشترک قیمت کو بموجب دفعہ ۱۲۲ کے دریافت کرسکتی ہین

(۱۲۸) ایک صورت ایسی بہی ہی کہ اوسمین دفعات ۱۲۴ اور ۱۲۶ کی بہی امداد مساوات مفروضہ کی حل کرنی مین [تہذیب کرتین]

مثلاً مساوات ح (لا) = ۰ ہو اور یہہ ہم کو معلوم ہی کہ اوسکی قیمتون کی زوج واقع ہوتے ہین اور ہر یک زوج ا اور ب قیمتون کا اس ارتباط ا + ب = ۲ ر کی شرائط کو پورا کرتا ہے تو بموجب دفعہ ۱۲۴ کے ہم معادلات ح (لا) = ۰ اور ح (۲ ر - لا) = ۰ کی مشترک قیمتین دریافت کرینگے مگر ان قیمتون مین بالکل تطابق ہوگا اسواسطی کہ بموجب فرض کے

ح (ا) = ۰ یعنی ح (۲ ر - ب) = ۰ اور ح (ب) = ۰ یعنی ح (۲ ر - ا) = ۰

پس قیمتین ا اور ب دونو مشترک دونو مساواتون مین ہین اور علی ہذا القیاس اور ازواج قیمتون کے مشترک دونو مساواتون مین ہین اسواسطی دونو مساواتون مین تطبیق تامہ ہوگی

(۱۲۹) جس مساوات پر دفعہ بالا مین بحث ہوئی ہی اوسکی تنزل کی بہت طریقے ہین مگر ہم اونمین صرف دو لکہتی ہین تاکہ طالب علمون کو اس بات کی مضمون مین مشق ہوجاے

اول ہم عمل اسطرح کرتی ہین کہ فرض کرو ا - ب = ۲ ی تو ہم کو ایک ساتہہ ہی یہہ مساواتین حاصل ہونگی

ح (ا) = ۰ ، ا + ب = ۲ ر ، ا - ب = ۲ ی

ان مساواتون مین سی دوسری تیسری مساوات سی ا = ی + ر اس قیمت کو مساوات اول مین رکہو تو ح (ی + ر) = ۰ اس مساوات سی قیمتین ی کی دریافت ہوسکتی ہین اور پہر ان قیمتون کی مطابق ا اور ب کی قیمتین بہی دریافت ہوجائینگی اب یہہ بات آسان ہی کہ مساوات ح (ر + ی) = ۰ میں ہم یہہ ثابت کردین کہ اوسمین ی کی جفت قوا ہین پس اگر ہم $ی^۲$ کو مقدار مجہول خیال کرین تو اس مساوات کا درجہ مساوات مفروضہ کی درجہ سی نصف ہوگا

فرض کرو کہ مساوات مفروضہ کا ایک زوج قیمتون کا ا اور ب ہی اور دوسرا زوج سہ اور صہ ہی تو

خ (لا) = (لا - ا) (لا - ب) (لا - سہ) (لا - صہ) . . .

ح (ی + ر) = (ی + ر - ا) (ی + ر - ب) (ی + ر - سہ) (ی + ر - صہ) . . .

= (ی + (ا + ب)/۲ - ا) (ی + (ا + ب)/۲ - ب) (ی + (سہ + صہ)/۲ - سہ) (ی + (سہ + صہ)/۲ - صہ) .

= [ی^2 - ((ا - ب)/۲)^2] [ی^2 - ((سہ - صہ)/۲)^2] . . . . .

یعنی ح (ی + ر) مین صرف ی کی جفت قوا ہین

درحقیقت اس مسئلہ مین کچھ تمیز قیمتون ا اور ب کی درمیان نہین کی گئی سلئی جو مساوات ایسی بنائی جاتی ہی اوسکی قیمت (ا - ب)/۲ ہو تو ضرور ہم کو یہہ توقع ہوسکتی ہی کہ (ب - ا)/۲ بھی اوسکی قیمت ہوگی اور نفس الامر مین یہی ہوتا ہی

دوم اسطرح بھی عمل کرتی ہین کہ ی = ا ب کے فرض کرین تو

(لا - ا) (لا - ب) = لا^2 - (ا + ب) لا + ا ب = لا^2 - ۲ ر لا + ی

اگر ی کی مناسب قیمت فرض کرین تو لا^2 - ۲ ر لا + ی ایک جز ضربی ح (لا) کا ہوگا ح (لا) کا

لا^2 - ۲ ر لا + ی پر تقسیم کئی جاؤ جب تک کہ باقی کی صورت ع لا + ق پیدا ہو آئین ع اور ق

جملی ی کی ہین اور اونین لا شامل نہین ہی اسی معلوم ہوا کہ ضروری شرط اس امر کی کہ

ح (لا) کا جز ضربی لا^2 - ۲ ر لا + ی ہی سہ ہی کہ ع = ۰ اور ق = ۰

بموجب دفعہ ۱۲۲ کی ی کی قیمت ایسی دریافت کرو کہ وہ دونو مساواتون کی شرائط کو پورا کرے

اور پھر ا اور ب کو ان مساواتون

ا + ب = ۲ ر　　ی = ا ب

سے دریافت کرو

(۱۳۰) فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی تین قیمتین ا اور ب اور س کا یہہ ارتباط باہمی

معلوم ہی کہ ع ا + ق ب + ر س = ص اب مطلوب یہہ ہی کہ ان قیمتون کو دریافت کرین

چونکہ ا اور ب اور س مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتین ہین تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$ح(ا) = ۰ ، ح(ب) = ۰ ، ح(س) = ۰$ پس

$ح(ا) = ۰ ، ح(ب) = ۰ ، ح\left(\frac{ص - ع ا - ق ب}{ر}\right) = ۰$

اب آخر دو مساواتوں سے ب کو دور کرو تو ایک یہہ مساوات ہم کو حاصل ہوگی کہ $سر(ا) = ۰$

پس مساوات $ح(لا) = ۰$ اور $سر(لا) = ۰$ کی ایک مشترک قیمت ا ہے اور یہہ بموجب دفعہ ۱۲۲ کے دریافت ہو سکتا ہے

(۱۳۱) اس باب کی مضمون سے متعلق چند مثالیں اب ہم لکھتے ہیں

(۱) اس مساوات

$$لا^{ن} + ع_{۱} لا^{ن-۱} + ع_{۲} لا^{ن-۲} + \cdots + ع_{ن} = ۰$$

کی قیمتیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں انکو دریافت کرو

ان قیمتوں کو ا، ا + ب، ا + ۲ب، ۔ ۔ ۔ سے تعبیر کرو

تو بموجب دفعہ ۷۴ کے

$$-ع_{۱} = ا + (ا + ب) + (ا + ۲ب) + \cdots + (ا + \overline{ن - ۱}\,ب)$$

$$ع_{۱}^{۲} - ۲ع_{۲} = ا^{۲} + (ا + ب)^{۲} + (ا + ۲ب)^{۲} + \cdots + (ا + \overline{ن - ۱}\,ب)^{۲}$$

یعنی $-ع_{۱} = ن ا + \frac{ن(ن - ۱)}{۲} ب$

$$ع_{۱}^{۲} - ۲ع_{۲} = ن ا^{۲} + ن(ن - ۱) ا ب + \frac{ن(ن - ۱)(۲ن - ۱)}{۶} ب^{۲}$$

بیسواں باب الجبرا کا دیکھو

اول حاصل کے مجذور میں سے دوسرے حاصل کے ن گنی کو تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$(ن - ۱) ع_{۱}^{۲} - ۲ن ع_{۲} = \frac{ن^{۲}(ن^{۲} - ۱)}{۱۲} ب^{۲}$$

پس ب اسی سے دریافت ہوگیا اور ب کی معلوم ہونے سے ا معلوم ہو جائیگا

(۲) مساوات $لا^{۴} + ۳لا^{۳} - ۱۲لا^{۲} - ۴۸لا - ۶۴ = ۰$ کی دو قیمتیں ہیں جو مقدار میں مساوی ہیں اور اونکی علامتیں مختلف ہیں اونکو دریافت کرو یہاں اگر لا کی علامت بدل دیں تو مساوات

ایسی حاصل ہوگی جسکی اور مساوات مفروضہ کی ایک قیمت مشترک دونوں میں ہوگی یعنی مساوات مفروضہ اور اس مساوات

$$لا^{۴} - ۳لا^{۳} - ۱۲لا^{۲} + ۴۸لا - ۶۴ = ۰$$

کی ایک قیمت مشترک ہی پس بموجب دفعہ ۱۲۲ کی ان دونوں مساواتوں کے بائیں طرف کی ارکان کا وفق اعظم دریافت کریں یا دونوں مساواتوں کو تفریق کریں تو

$$۶لا^{۳} - ۹۶لا = ۰$$

اسواسطی $لا = ۰$ یا $لا^{۲} = ۱۶$

پہلی سی کوئی قیمت نہیں حاصل ہوتی اور دوسری سی $لا = \pm ۴$ حاصل ہوتا ہی اور $+۴$ اور -۴ مساوات مفروضہ کی قیمتیں ہیں

(۳) مساوات $۳لا^{۴} - ۱۹لا^{۳} + ۹لا^{۲} - ۱۹لا + ۶ = ۰$ کی دو قیمتیں ہیں جنکا حاصل ضرب ۲ ہی اونکو دریافت کرو

فرض کرو کہ ی ایک قیمت ہی تو $\frac{۲}{ی}$ دوسری قیمت ہوگی اسی معلوم ہوا کہ

$$۳ی^{۴} - ۱۹ی^{۳} + ۹ی^{۲} - ۱۹ی + ۶ = ۰ \quad (۱)$$

اور $۳\left(\frac{۲}{ی}\right)^{۴} - ۱۹\left(\frac{۲}{ی}\right)^{۳} + ۹\left(\frac{۲}{ی}\right)^{۲} - ۱۹\left(\frac{۲}{ی}\right) + ۶ = ۰$

یعنی $۶ی^{۴} - ۳۸ی^{۳} + ۳۶ی^{۲} - ۱۵۲ی + ۴۸ = ۰$

یا $۳ی^{۴} - ۱۹ی^{۳} + ۱۸ی^{۲} - ۷۶ی + ۲۴ = ۰ \quad (۲)$

معادلات (۱) اور (۲) کے بائیں طرف کی ارکان کا وفق مشترک $۳ی^{۲} - ۱۹ی + ۶$ ہے

اسکو برابر صفر کے لکھکر ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ $ی = \frac{۱}{۳}$ یا $ی = ۶$ پس $\frac{۱}{۳}$ اور ۶ مطلوبہ قیمتیں ہیں

دسواں باب معادلات متکافیہ

(۱۳۲) مساوات متکافیہ اوسی کہتی ہیں کہ اگر مقدار مجہول بدل کر متکافی اپنا ہو جاے تو بھی وہ مساوات نہ بدلی اسی معلوم ہوا کہ اگر ا قیمت ایسی مساوات کی ہو تو ا کا متکافی یعنی $\frac{۱}{ا}$ بھی اوس مساوات کی قیمت ہو اب ہم لکھینگے کہ مساوات متکافیہ کا حل مع قوت

اوس مساوات کی حل پر ہی کہ جسکا درجہ مساوات مفروضہ کی نصف درجہ سی بڑا نہین ہی اول ہم یہہ کہتی ہین کہ مساوات کی امثال مین کیا ارتباط ہو کہ وہ مساوات متکافیہ ہو اور بعدازان یہہ لکھینگے کہ مساوات کا تنزل ہوکر کسطرح حل اوسکا اسان ہو سکتا ہے

(۱۳۳) وہ شرائط دریافت کرو کہ جسی مساوات مفروضہ ایک مساوات متکافیہ ہو

فرض کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_1 \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ع}_2 \text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}-2} \text{لا}^2 + \text{ع}_{\text{ن}-1} \text{لا} + \text{ع}_{\text{ن}} = 0 \quad (1)$$

لا کو $\frac{1}{\text{لا}}$ سی بدلو اور پہر $\text{لا}^{\text{ن}}$ مین ضرب دو اور $\text{ع}_{\text{ن}}$ پر تقسیم کرو اور ارقام کو دوبارہ مرتب کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{\text{ع}_{\text{ن}-1}}{\text{ع}_{\text{ن}}} \text{لا}^{\text{ن}-1} + \frac{\text{ع}_{\text{ن}-2}}{\text{ع}_{\text{ن}}} \text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_{\text{ن}}} \text{لا}^2 + \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_{\text{ن}}} \text{لا} + \frac{1}{\text{ع}_{\text{ن}}} = 0 \quad (2)$$

اب (۲) اور (۱) کی تطبیق کی لئی ضروری ہی کہ امثال یکسان قوا لا کی اپسمین برابر ہون تو

$$\text{ع}_1 = \frac{\text{ع}_{\text{ن}-1}}{\text{ع}_{\text{ن}}} \text{ اور } \text{ع}_2 = \frac{\text{ع}_{\text{ن}-2}}{\text{ع}_{\text{ن}}} \cdots \text{ع}_{\text{ن}-2} = \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_{\text{ن}}} \text{ و } \text{ع}_{\text{ن}-1} = \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_{\text{ن}}} \text{ و } \text{ع}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ع}_{\text{ن}}}$$

اخر مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہی کہ $\text{ع}_{\text{ن}}^2 = 1$ اسیواسطی $\text{ع}_{\text{ن}} = +1$ یا -1 اسسے معادلات متکافیہ کی دو نوع بنتی ہین

اول فرض کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}} = 1$ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ع}_1 = \text{ع}_{\text{ن}-1} \text{ اور } \text{ع}_2 = \text{ع}_{\text{ن}-2} \cdots \text{ع}_{\text{ن}-2} = \text{ع}_2 \text{ و } \text{ع}_{\text{ن}-1} = \text{ع}_1$$

پس معلوم ہوا کہ جو مساوات ایسی ہی کہ اول اور اخر سی ارقام متساوی الابعاد کے امثال برابر ہین وہ مساوات متکافیہ ہی

دوم فرض کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}} = -1$ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ع}_1 = -\text{ع}_{\text{ن}-1} \text{ و } \text{ع}_2 = -\text{ع}_{\text{ن}-2} \cdots \text{ع}_{\text{ن}-2} = -\text{ع}_2 \text{ و } \text{ع}_{\text{ن}-1} = -\text{ع}_1$$

اس صورت مین اگر مساوات جفت درجہ کی ہی تو اوپر کے سلسلہ شرائط مین $\text{ع}_{\text{م}} = -\text{ع}_{\text{م}}$ اگر $\text{م} = \frac{1}{2}\text{ن}$ کی ہو اور یہہ ناممکن ہی بشرطیکہ $\text{ع}_{\text{م}} = 0$ کے نہ ہو

پس مساوات متکافیہ وہ مساوات ہی جسمین اغاز اور انجام سی ارقام متساوی الابعاد

مقدار میں برابر اور علامت میں مختلف ہوں مگر اوسکی ساتھہ یہہ بہی شرط ہی کہ اگر مساوات جفت درجہ کی ہو تو رقم متوسط کا سر صفر ہو

(۱۳۴) اول نوع کی مساوات متکافیہ طاق درجہ کی ایک قیمت کا -۱ ہونا بادی النظر میں ظاہر معلوم ہوتا ہی پس اگر ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کری تو ح (لا) پورا لا+ ۱ پر تقسیم ہوگا دفعہ ۸ کو دیکہو فرض کرو کہ سر (لا) خارج قسمت ہو تو سر (لا) = ۰ مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ہوگی اور اوسکی اخر رقم مثبت ہوگی

دوسری نوع کی مساوات متکافیہ طاق درجہ کی ایک قیمت کا + ۱ ہونا بادی النظر میں ظاہر معلوم ہوتا ہی پس اگر ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کری تو مساوات ح (لا) پورا لا - ۱ پر تقسیم ہوگا دفعہ ۸ دیکہو اور فرض کرو کہ سر (لا) خارج قسمت نکلتا ہی تو سر (لا) = ۰ مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ہوگی اور اوسکی اخر رقم مثبت ہوگی

دوسری نوع کی مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ایک قیمت + ۱ اور دوسری قیمت - ۱ ہوگی یہہ امر ظاہر بادی النظر میں معلوم ہوتا ہی پس اگر ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کری تو ح (لا) پورا لا^2 - ۱ پر تقسیم ہوگا دفعہ ۳۳ کو دیکہو اور فرض کرو کہ سر (لا) خارج قسمت نکلتا ہی تو سر (لا) = ۰ مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ہوگی اور اوسکی اخر رقم مثبت ہوگی

(۱۳۵) خاص قیمتوں کی باب میں جو کچہہ اوپر بیان ہوا وہ بدیہی ہی مگر اوسکا اثبات بہی ان سے اخر صورت میں دوسری نوع کی جو مساوات متکافیہ جفت درجہ کی بیان ہوئی اوسے خیال کرو فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کرتا ہی اب ہم کو یہہ معلوم ہی کہ ح (لا) ایسا ہی کہ ح (لا) = - لا^{ن} ح $\left(\frac{1}{لا}\right)$ اور یہہ بہی ہم کو معلوم ہے کہ ح (لا) پورا لا^2 - ۱ پر تقسیم ہوتا ہی اب ہم کو ثابت کرنا یہہ ہی کہ خارج قسمت ایسا جملہ ہی کہ اول اور اخری ارقام متساوی الابعاد کے امثال برابر ہیں

ہم کو معلوم ہے کہ ح (لا) = - لا^{ن} ح $\left(\frac{1}{لا}\right)$

اسیواسطے $\frac{ح(\text{لا})}{\text{لا}^{۲}-۱} = -\frac{\text{لا}^{ن}}{\text{لا}^{۲}-۱}\,ح\left(\frac{۱}{\text{لا}}\right) = \text{لا}^{ن-۲}\,\frac{ح\left(\frac{۱}{\text{لا}}\right)}{\frac{۱}{\text{لا}^{۲}}-۱}$

اسی ہمارے بیان کی تصدیق ہوتی ہی کیونکہ $\frac{ح\left(\frac{۱}{\text{لا}}\right)}{\frac{۱}{\text{لا}^{۲}}-۱}$ اسطرح حاصل ہوتا ہی کہ $\frac{ح(\text{لا})}{\text{لا}^{۲}-۱}$ میں لا کو $\frac{۱}{\text{لا}}$ سے بدل دیں

(۱۳۶) دفعہ ۱۳۴ اسی یہہ ثابت ہوتا ہی کہ مساوات متکافیہ کیا تو جفت درجہ کی ہوگی اور اخر رقم مثبت ہوگی یا اوسکا تنزل اسی صورت میں ہوسکتا ہی پس اسی صورت کی مساوات کو مدار اپنی ساری تحقیقات کا قرار دیتی ہیں اور اب ثابت کرینگے کہ ایسی مساوات کا تنزل اوسکی نصف درجہ تک ہوسکتا ہے

(۱۳۷) مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ہی اور اوسکی اخر رقم مثبت ہی مطلوب یہہ ہی کہ اوسکا تنزل کریں

فرض کرو کہ مساوات $\text{لا}^{۲م} + ع_{۱}\,\text{لا}^{۲م-۱} + ع_{۲}\,\text{لا}^{۲م-۲} + \cdots + ع_{۲}\,\text{لا}^{۲} + ع_{۱}\,\text{لا} + ۱ = ۰$

لا^م پر تقسیم کرو اور اغاز اور انجام سے جو اقام متساوی الابعاد ہوں اونکو اکہٹا کرکے زوج بناؤ تو

$$\text{لا}^{م} + \frac{۱}{\text{لا}^{م}} + ع_{۱}\left(\text{لا}^{م-۱} + \frac{۱}{\text{لا}^{م-۱}}\right) + ع_{۲}\left(\text{لا}^{م-۲} + \frac{۱}{\text{لا}^{م-۲}}\right) + \cdots = ۰$$

اب فرض کرو کہ $\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}} = د$ تو

$$\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{\text{لا}^{۲}} = د^{۲} - ۲$$

$$\text{لا}^{۳} + \frac{۱}{\text{لا}^{۳}} = \left(\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{\text{لا}^{۲}}\right)\left(\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}\right) - د = د^{۳} - ۳د$$

اور علی العموم $\text{لا}^{ع+۱} + \frac{۱}{\text{لا}^{ع+۱}} = \left(\text{لا}^{ع} + \frac{۱}{\text{لا}^{ع}}\right)\left(\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}\right) - \left(\text{لا}^{ع-۱} + \frac{۱}{\text{لا}^{ع-۱}}\right)$

پس ہم $\text{لا}^{ع+۱} + \frac{۱}{\text{لا}^{ع+۱}}$ کو جملہ ناطقہ د کا ع + ۱ درجہ کا کہہ سکتی ہیں اسی معلوم ہوا کہ اوپر کی مساوات میں انکی مندرج کرنیسی ایک مساوات د کی م درجہ کی حاصل ہوگی اور پھر د کی ہر یک قیمت کی مطابق لا کی دو قیمتیں اور ایک جز ضربی $\text{لا}^{۲} - د\,\text{لا} + ۱$ حاصل ہوگا

(۱۳۸) دفعہ گذشتہ کا ارتباط علی العموم اسطرح بیان ہوسکتا ہے کہ

$$\text{لا}^{ع+۱} + \frac{۱}{\text{لا}^{ع+۱}} = \left(\text{لا}^{ع} + \frac{۱}{\text{لا}^{ع}}\right)د - \left(\text{لا}^{ع-۱} + \frac{۱}{\text{لا}^{ع-۱}}\right)$$

اسی ثابت ہوتا ہے کہ مقادیر

$$\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} \quad \text{اور} \quad \text{لا}^{2} + \frac{1}{\text{لا}^{2}} \quad \text{اور} \quad \text{لا}^{3} + \frac{1}{\text{لا}^{3}} \quad \ldots\ldots$$

سلسلہ مکررہ بنانی مین اور قسطاس ارتباط ۱ − ی + ۱ ہی انچاسوان باب جبر مقابلہ کا دیکھو

اب ہم آگی ایک جملہ عامہ $\text{لا}^{\text{ع}} + \frac{1}{\text{لا}^{\text{ع}}}$ کے واسطی ارقام ی مین لکھینگے

(۱۳۹) تمثیلاً مساوات متکافیہ

$$۲\text{لا}^{6} + \text{لا}^{5} - ۱۳\text{لا}^{4} + ۱۳\text{لا}^{2} - \text{لا} - ۲ = ۰ \quad \text{ہو تو}$$

بادی النظر مین یہان ۱ اور −۱ قیمتین معلوم ہوتی ہین اسیواسطے دائین طرف کی رکن کو $\text{لا}^{2} - ۱$ پر تقسیم کر سکتے ہین اور اوسی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$۲\text{لا}^{4} + \text{لا}^{3} - ۱۱\text{لا}^{2} + \text{لا} + ۲ = ۰$$

اسیواسطے $\quad \text{لا}^{2} + \frac{1}{\text{لا}^{2}} + \frac{1}{2}\left(\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}}\right) - \frac{11}{2} = ۰$

$\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = \text{ی}$ رکھو تو

$$\text{ی}^{2} - ۲ + \frac{\text{ی}}{2} - \frac{11}{2} = ۰$$

$$\text{یا} \quad \text{ی}^{2} + \frac{\text{ی}}{2} - \frac{15}{2} = ۰$$

$$\text{ی} = \frac{5}{2} \quad \text{یا} \quad -۳$$

اسی معلوم ہوا کہ $\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = \frac{5}{2}$ یا $\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = -۳$

اسیواسطے $\quad \text{لا} = ۲ \;\text{یا}\; \frac{1}{2} \;\text{یا}\; \frac{1}{2}\left(-۳ \pm \sqrt{۵}\right)$

(۱۴۰) مساوات

$$\text{لا}^{۲\text{م}} + \text{ع}\,\text{لا}^{۲\text{م}-1} + \text{ع}_{۲}\,\text{لا}^{۲\text{م}-2} + \ldots + \text{ع}_{\text{م}}\,\text{لا}^{\text{م}} + \text{ع}_{\text{م}-1}\,\text{س}\,\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ع}_{\text{م}-2}\,\text{س}^{2}\,\text{لا}^{\text{م}-2}$$

$$+ \ldots + \text{ع}_{۲}\,\text{س}^{\text{م}-2}\,\text{لا}^{2} + \text{ع}_{۱}\,\text{س}^{\text{م}-1}\,\text{لا} + \text{س}^{\text{م}} = ۰$$

بدل کر مساوات متکافیہ بن سکتی ہی اسطرح کہ $\text{لا} = \text{ی}\sqrt{\text{س}}$ کے فرض کرین اور $\text{س}^{\text{م}}$ پر تقسیم کرین تو مساوات متکافیہ ی مین حاصل ہو جائیگی جسکی صورت اصلی کینڈی پر ہوگی

گیارہوان باب معادلات ثنائی یا دوری

(۱۴۱) جس مساوات کی صورت $لا^{ن} - ا = ۰$ ہو اور اوسمین ا مقدار معلوم ہو تو اوسکو معادلہ یا مساوات ثنائی کہتے ہین۔ اس مساوات کی قیمتین سب مختلف ہوتی ہین کیونکہ $لا^{ن} - ا$ کا اول جملہ مشتقہ $ن لا^{ن-۱}$ ہے اور کوئی قیمت ایسی لا کی نہین ہو سکتی کہ $لا^{ن} - ا$ اور $ن لا^{ن-۱}$ کو معدوم کرے دفعہ ۷۵ دیکھو

(۱۴۲) اگر $لا^{ن} - ا = ۰$ تو $لا = \sqrt[ن]{ا}$ یعنی لا برابر ا کی ن مرتبہ کی نزول کے ہے لیکن مساوات $لا^{ن} - ا = ۰$ کی ن قیمتین بموجب دفعہ ۳۳ کی ہین اور بموجب دفعہ ۱۴۱ کے سب مختلف ہین اسی یہہ ایک بڑا نتیجہ نکلتا ہے کہ ہر یک مقدار جبریہ کی ن مرتبے کی نزول ن طرح کی ہوتی ہین مقدار جبریہ سے مراد ہے ہماری حقیقی مقدار سے یا مقدار تخیلی سے جو $ع + ق\sqrt{-۱}$ کی صورت کہتی ہو

(۱۴۳) فرض کرو کہ ا مقدار کی ن مرتبے کی نزولون مین سے ایک کو ط تعبیر کرتا ہے تو $ط^{ن} = ا$ اب مساوات $لا^{ن} - ا = ۰$ مین $لا = ط د$ کے فرض کرو تو $ط^{ن} د^{ن} - ا = ۰$ اسواسطے $د^{ن} - ۱ = ۰$ اسی معلوم ہوا کہ $د = \sqrt[ن]{۱}$ یعنی د برابر ایک کے ن مرتبہ کے نزول کی برابر ہے اور $لا = ط د = ط\sqrt[ن]{۱}$ لیکن $لا = \sqrt[ن]{ا}$ اسواسطے $\sqrt[ن]{ا} = ط\sqrt[ن]{۱}$ پس

پس کسی مقدار جبریہ کی ن مرتبے کی نزول اسطرح دریافت ہو سکتی ہین کہ اونمین سے ایک کو واحد کے ن نزولون مین متواتر ضرب دین

(۱۴۴) اب فرض کرو کہ ا ایک حقیقی مثبت مقدار ہے اور ہم کو مساوات $لا^{ن} - ا = ۰$ اور مساوات $لا^{ن} + ا = ۰$ کے حل کرنی ہین اور فرض کرو کہ ط حسابی قیمت ا کے ن وین نزول کے ہے جو ہمیشہ ضابطہ ثانی کی استعانت سے نکل سکتی ہے خواہ حقیقتاً یا تقریباً جبر مقابلہ کا چوبیسوان باب دیکھو اب $لا = ط د$ کی فرض کرو تو مساواتین مفروضہ کی یہہ صورت ہو جاینگی کہ $د^{ن} - ۱ = ۰$ اور $د^{ن} + ۱ = ۰$ اور یہہ مساواتین علم مثلثی جملون کے استعانت سے حل ہو سکتی ہین تیئیسوان باب علم مثلث کا دیکھو اب ہم ان مساواتون کو بغیر علم مثلثی جملون کے استعانت کی حل کرینگے اور اگرچہ ہم اونکو جبر مقابلہ سے علی العموم نہین حل کر سکتے ہین مگر یہہ بھی اونکی باب مین نتایج مستنبط کر سکتے ہین

(۱۴۵) اگر مساوات لاٰن - ۱ = ۰ کی قیمت سہ ہو تو سہٰم بھی اوسکی قیمت ہوگی جسمین م صحیح مثبت یا منفی ہے
اسواسطی کہ (سہٰم)ٰن = سہٰمن = (سہٰن)ٰم = ۱ٰم = ۱

(۱۴۶) اگر مساوات لاٰن + ۱ = ۰ کی سہ ایک قیمت ہو تو سہٰم بھی ایک قیمت ہوگی جسمین م طاق صحیح مثبت یا منفی ہے
اسواسطی کہ (سہٰم)ٰن = سہٰمن = (سہٰن)ٰم = (-۱)ٰم = -۱ اگر م طاق ہو

(۱۴۷) اگر م اور ن متباین ہون تو معادلات لاٰم - ۱ = ۰ اور لاٰن - ۱ = ۰ کی کوئی مشترک قیمت سواء واحد کے نہین ہوسکتی
فرض کہ ع اور ق دو صحیح ایسی ہون کہ جسمین یہہ ارتباط ہو کہ ع م - ق ن = ۱ ایسے صحاح ہمیشہ جبر مقابلہ کی استعانت سی دریافت ہوسکتی ہین چوالیسوان باب جبر مقابلہ کا دیکھو
اور فرض دونو مساواتون کی مشترک قیمت ط ہی پس طٰم = ۱ اسیواسطے طٰعم = ۱ اور طٰن = ۱ اسیواسطے طٰقن = ۱ اسی معلوم ہوا کہ طٰعم-قن = ۱ یعنی ط = ۱

(۱۴۸) اگر ن عدد اولی ہو اور مساوات لاٰن - ۱ = ۰ کی کوئی سی قیمت سہ ہو مگر واحد نہ ہو تو تمام قیمتین مساوات کی اس سلسلہ سہ و سہٰ۲ و سہٰ۳ . . . سہٰن سے حاصل ہونگین
اسواسطی کہ بموجب دفعہ ۱۴۵ کے یہہ مقدار تمام قیمتین مساوات کی ہین اسواسطے اب ہم کو صرف یہہ ثابت کرنا باقی رہا کہ اونمین سے کوئی سی دو برابر نہین ہین اگر برابر ہونا ممکن ہو تو فرض کرو کہ سہٰر = سہٰص پس سہٰر-ص = ۱ پس اسی ثابت ہوا کہ لاٰن - ۱ = ۰ اور لاٰر-ص - ۱ = ۰ قیمت مشترک سواء واحد کی رکھتی ہین اور یہہ بموجب دفعہ ۱۴۷ کی ناممکن ہے اور چونکہ ر - ص کم بہ نسبت ن کے ہے اسواسطی وہ متباین ہین

(۱۴۹) اگر ن عدد اولی نہ ہو اور سہ کوئی سی قیمت مساوات لاٰن - ۱ = ۰ ہو تو
بموجب ۱۴۵ کے یہہ تو درست ہی کہ کوئی قوت سہ کی ایک قیمت مساوات کی ہی لیکن یہہ نہین ہے کہ متواتر قواء سہ سی سب قیمتین مساوات کی ہاتہہ لگ جائین تمثیلاً فرض کرو کہ ن = ع ق اور مساوات لاٰع - ۱ = ۰ کی قیمت سہ ہی تو مساوات لاٰن - ۱ = ۰ کی بھی قیمت سہ ہے

اور علی ہذا القیاس اور قوائے سہ کی کیفیت ہی لیکن سہ کی قوتوں کے لینے سے ع مختلف قیمتوں سے زیادہ قیمتیں نہیں لی سکتی اسواسطے کہ $سہ^{ع+۱} = سہ^{ع} \times سہ = سہ$ اور $سہ^{ع+۲} = سہ^{ع} \times سہ^{۲} = سہ^{۲}$ اور علی ہذا القیاس پس مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی قوائے سہ سے تمام قیمتیں نہیں ہاتھہ لگ سکتیں

اگر ن عدد اولی نہ ہو تو بھی یہہ درست ہی کہ بعض قیمتیں مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی ایسی خاصیت رکھیں کہ اونکی متواتر قیمتوں سی تمام قیمتیں ہاتھہ لگ جائیں علم مثلث جملی اگر قیمتوں کی جگہہ لیں تو یہہ بات آسانی سی ثابت ہو سکتی ہے

(۱۵۰) مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ میں اگر ن مختلف اعداد متباینہ کا حاصل ضرب ہو تو اوسکا حل موقوف اون مساواتوں پر ہوگا جنکی صورت متشابہ اسی مساوات کی ہو اور اونمیں لا کی قوت نما ن کے اجزاے ضربی اوسے ہوں

تمثیلاً فرض کرو کہ ن حاصل ضرب تین اجزاے ضربی اولی م و ع و ق کا ہو اور سہ قیمت مساوات $لا^{م} - ۱ = ۰$ کی اور $لا^{ع} - ۱ = ۰$ کی قیمت صہ ہو اور مساوات $لا^{ق} - ۱ = ۰$ کی قیمت لر ہو اور یہہ سب قیمتیں مختلف واحد سے فرض کی جائیں

اول مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی قیمتیں اس حاصل ضرب کی رقمیں ہونگیں

$$(۱ + سہ + سہ^{۲} + \cdots + سہ^{م-۱})(۱ + صہ + صہ^{۲} + \cdots + صہ^{ع-۱})(۱ + لر + لر^{۲} + \cdots + لر^{ق-۱})$$

اسواسطے کہ فرض کرو کہ $سہ^{ر} صہ^{ص} لر^{ف}$ ایسے رقم کو تعبیر کریں تو $(سہ^{ر} صہ^{ص} لر^{ف})^{ن} = ۱$ کیونکہ $سہ^{رن} = ۱$ اور $صہ^{صن} = ۱$ اور $لر^{فن} = ۱$ **دوم** اس حاصل ضرب کی کوئی دو قیمتیں ایسیں برابر نہیں ہیں اسواسطے کہ اگر یہہ ممکن تو فرض کرو کہ $سہ^{ر} صہ^{ص} لر^{ف} = سہ^{ر'} صہ^{ص'} لر^{ف'}$ تو $سہ^{ر-ر'} = صہ^{ص'-ص} لر^{ف'-ف}$ مقدار دائیں طرف قیمت مساوات $لا^{م} - ۱ = ۰$ کی ہے اور بائیں طرف کی مقدار قیمت مساوات $لا^{ع ق} - ۱ = ۰$ کی ہی لیکن م اور ع ق متباین ہیں تو یہہ ناممکن ہی کہ ان مساواتوں کی قیمت مشترک ہو الا واحد یہہ قیمت مستثنے ہے

اگر ن میں اجزاے ضربی متباین تین سی زیادہ ہوں تو بھی اسی طرح عمل ہوگا

(۱۵۱) دوم فرض کرو کہ اجزاء ضربی متباین ن مین مکرر واقع ہون اور ن = لو ہو ھو اسمین لو و ہو و ھو کوی قوت اعداد اولے م و ع و ق کی ہین تو یہہ بہی درست ہوگا اگر ہم لو قیمتین مساوات لا^لو - ۱ = ۰ کی اور ہو قیمتین مساوات لا^ہو - ۱ = ۰ کی اور ھو قیمتین مساوات لا^ھو - ۱ = ۰ ہوا اور موافق ہر ایک نظم کی ان قیمتون کا ہر ایک ممکن حاصل ضرب معلوم کر لین تو مساوات لا^ن - ۱ = ۰ کی تمام قیمتین حاصل ہو جائینگی بموجب دفعہ ۱۴۹ کی ہر ایک نظم کی قیمتین کچھہ ضرور نہین ہے کہ اوس ہر ایک قیمت کی قواسی تعبیر ہون جسکو خواہ مخواہ مقرر کر لین

اگر ن مین تین مختلف اعداد اولی سی زیادہ اعداد اولی ہون تو یہی عمل اسطرح ہوگا

(۱۵۲) اکثر دستور کی بات ہی کہ ایک دعوی مساوات لا^ن - ۱ = ۰ مین اور زیادہ لکہا کرتی ہین او سکا ن قوت کسی عدد اولی کی ہوتی ہی اگرچہ یہہ عملاً کچھہ بکار آمد نہین ہی مگر ہم اوسکو یہان لکھتی ہین مثلاً فرض کرو کہ ن = م^۳ اور م عدد اولی ہی اور مساوات لا^م - ۱ = ۰ کی ایک قیمت سہ ہی اور مساوات لا^م - سہ = ۰ کی قیمت صہ ہی اور مساوات لا^م - صہ = ۰ کی قیمت لر ہی تو مساوات لا^ن - ۱ = ۰ کی قیمتین اس حاصل ضرب کی ارقام ہونگین کہ

(۱ + سہ + سہ^۲ + ... + سہ^{م-۱}) (۱ + صہ + صہ^۲ + ... + صہ^{م-۱}) (۱ + لر + لر^۲ + ... + لر^{م-۱})

اول کوئی سی رقم اس حاصل ضرب کی ایک قیمت مساوات کی ہی اسواسطی کہ فرض کرو سہ^ص صہ^ف لر^ق کسی رقم کو تعبیر کرتی ہی تو (سہ^ص صہ^ف لر^ق)^ن = سہ^{ن ص} صہ^{ن ف} لر^{ن ق} = ۱

دوم اس حاصل ضرب کی کوئی سی دو رقمین برابر نہین ہو سکتین اسواسطے کہ اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ سہ^ص صہ^ف لر^ق = سہ^ر صہ^د لر^ب پس سہ^ل = سہ^{لر} اسمین

ل = ر + ص/م + ف/م^۲ اور لر = صد + بد/م + حد/م^۲

اسواسطے سہ^{ل-لر} = ۱ اسواسطے سہ^{لو} - ۱ = ۰ اسمین م = م^۲ (ل - لر) لیکن

م^۲ (ل - لر) = م^۲ (ر - صد) + م (ص - بر) + ف - را اور یہہ م سی متباین ہے اور اسواسطے م^۳ سی متباین ہی اسواسطے مساواتین لا^ن - ۱ = ۰ اور لا^م - ۱ = ۰

کی مشترک قیمت سواے واحد کے نہین ہوسکتی

(۱۵۳) عملاً دفعہ بالا کچھہ عظمت نہین رکھتی اسلئی کہ جو عمال اوسمین کرنے پڑتے ہین وہ علی العموم نہین ہوسکتی فرض کرو کہ مساوات $لا^{م} - ۱ = ۰$ کو حل کرسکتے ہین اور سہ کو دریافت کرتی ہین تو تمام مقادیر ا دسہ وسہ^۲ و . . . سہ^{م-۱} قیمتین مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی تو اسطرح ہم کو م قیمتین دریافت ہوجائینگے لیکن صہ کے دریافت کرنی کی واسطے ہم مساوات $لا^{م} - سہ = ۰$ کو حل کرین یعنی $\sqrt[م]{سہ}$ کو دریافت کرین اسمین سہ = ...‌ اور اس دریافت کرنے کے واسطی کوئی ترکیب جبر مقابلہ مین نہین ہے

مثلاً مساواتین $لا^{۳} - ۱ = ۰$ اور $لا^{۵} - ۱ = ۰$ کو اگر ہم حل کرلین تو مساوات $لا^{۱۵} - ۱ = ۰$ کی بہی تمام حل بموجب دفعہ ۱۵۰ کی حاصل ہوجائینگے مگر ہم عملاً مساوات $لا^{۹} - ۱ = ۰$ یا $لا^{۲۵} - ۱ = ۰$ کو بموجب دفعہ ۱۵۲ کے نہین حل کرسکتی ہم کو صرف تین قیمتین مساوات اول کی اور پانچ قیمتین مساوات دوم کی حاصل ہونگین

(۱۵۴) معادلات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ اور $لا^{ن} + ۱ = ۰$ کی عملی حل کرنی کی ترکیب ہم لکھتی ہین اسمین ن بہت بڑا نہین ہے اگر ن کوئی قوت ۲ کی ہو تو ان مساواتون کے حل مکرر جذر نکالتی سی دریافت کرلینگے اور اصم ثنائی کی بار بار جذر نکالنی کی ترکیب جبر مقابلہ مین لکھی ہے دفعہ ۳۸ کو دیکھو پس اس صورت مین تمام قیمتین معلوم ہوجائینگین اگر ن = ع م

اسمین ع = ۲^ر تو $لا^{ع} = ی$ کے فرض کرو تو مساواتین $لا^{ن} - ۱ = ۰$ اور $لا^{ن} + ۱ = ۰$ کی یہہ ہوجائینگین کہ $ی^{م} - ۱ = ۰$ اور $ی^{م} + ۱ = ۰$ پس اگر ی معلوم ہوجاے تو لا اسطرح دریافت ہوگا کہ ہم ر دفعہ مکرر جذر نکالین

(۱۵۵) مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ مین فرض کرو کہ ن طاق عدد ہی یعنی ن = ۲م + ۱ تو مساوات $لا^{۲م+۱} - ۱ = ۰$ کی ایک حقیقی قیمت ہوگی یعنی ۱+ اسواسطے کہ اوسکی کوئی منفی قیمت نہین ہے اور اگر لا کو برابر کسی مقدار کے سواے واحد کی قرار دین تو $لا^{۲م+۱}$ کبہی واحد کی

برابر نہیں ہوگا پس معلوم ہوا کہ مساوات کی حقیقی قیمت ایک ہی ہی $\text{لا}^{۲م+۱} - ۱$ کو $\text{لا} - ۱$ پر تقسیم
تو مساوات مختصر اور تحویل ہو کر یہہ پیدا ہوگی جسکو حل کرنا چاہی کہ

$$\text{لا}^{۲م} + \text{لا}^{۲م-۱} + \text{لا}^{۲م-۲} + \ldots + \text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱ = ۰$$

یہہ مساوات متکافیہ ہی اور اسکا حل م درجہ کی مساوات کے حل پر موقوف ہے

(۱۵۶) مساوات $\text{لا}^{ن} - ۱ = ۰$ فرض کرو کہ ن جفت ہی اور ن = ۲م تو مساوات کے حقیقی قیمتیں صرف دو +۱ اور -۱ ہیں اور $\text{لا}^{۲م} - ۱$ کو $\text{لا} - ۱$ اور $\text{لا} + ۱$ کے حاصل ضرب $\text{لا}^{۲} - ۱$ پر تقسیم کرتے ہیں پس جو مساوات حل کرنی پڑیگی وہ یہہ مختصر اور تحویل ہو کر حاصل ہوگی

$$\text{لا}^{۲م-۲} + \text{لا}^{۲م-۴} + \ldots + \text{لا}^{۲} + ۱ = ۰$$

یہہ مساوات متکافیہ ہی اور اوسکا حل م - ۱ درجہ کی مساوات کی حل پر موقوف ہے

مساوات $\text{لا}^{۲م} - ۱ = ۰$ کو $(\text{لا}^{م} - ۱)(\text{لا}^{م} + ۱) = ۰$ کی صورت میں لکھکر ہم عمل بآسانی سی کرسکتی ہیں اور یہہ اسکو تحلیل ان مساواتوں $\text{لا}^{م} - ۱ = ۰$ اور $\text{لا}^{م} + ۱ = ۰$ میں کرلیں یا اوس ترکیب کو عمل میں لائیں جو دفعہ ۱۴۷ میں بیان ہوئی

(۱۵۷) مساوات $\text{لا}^{ن} + ۱ = ۰$ میں فرض کرو کہ ن طاق ہی اور ن = ۲م + ۱ اور مساوات $\text{لا}^{۲م+۱} + ۱ = ۰$ کی صرف ایک حقیقی قیمت یعنی -۱ ہی اور $\text{لا}^{۲م+۱} + ۱$ کو $\text{لا} + ۱$ پر تقسیم کریں تو مساوات مختصر تحویل ہو کر حل کرنی کی واسطی یہہ پیدا ہوگی کہ

$$\text{لا}^{۲م} - \text{لا}^{۲م-۱} + \text{لا}^{۲م-۲} - \ldots + \text{لا}^{۲} - \text{لا} + ۱ = ۰$$

یہہ مساوات متکافیہ ہی اور اسکا حل م درجہ کی مساوات کے حل پر موقوف ہے

اگر ن طاق مساوات $\text{لا}^{ن} + ۱ = ۰$ میں ہو اور ہم لا کو -لا سی تبدیل کریں تو مساوات $\text{لا}^{ن} - ۱ = ۰$ حاصل ہوگی اگر ہم چاہیں تو اس دوسرے مساوات کو حل کریں اور جو قیمتیں نکلیں اونکی علامتیں بدل دیں تو اول مساوات کا حل حاصل ہو جائیگا

(۱۵۸) اگر مساوات $\text{لا}^{ن} + ۱ = ۰$ میں ن جفت فرض کریں تو مساوات کی کوئی حقیقی

قیمت نہین ہوگی یہہ مساوات مساوات متکافیہ ہی اور اوسکا حل اوس مساوات کی حل پر موقوف ہے جسکا درجہ نصف اصلی مساوات کی درجہ سی ہی یا اس مساوات کی حل کرنی مین دفعہ ۱۵۴ اکی ترکیب کام مین لاؤ

(۱۵۹) پس چار دفعات گذشتہ سی یہہ بات ثابت ہوتی ہی کہ معادلات مفروضہ کا حل ایسی معادلات کی حل پر موقوف ہوسکتا ہی جنکا درجہ نصف معادلات مفروضہ کے درجہ سی ہو

ہر ایک صورت مین حقیقی قیمتون کی موافق جو اجزاء ضربی ہوتی ہین اونکو دور کرتی ہین اور $\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = \text{ی}$ لکھتی ہین اور ایک مساوات ی کی حاصل ہوتی ہی اب یہہ مساوات ی کی تمام حقیقی قیمتین ہوسکتی ہین اسواسطی کہ فرض کرو کہ $\text{سہ} + \text{صہ}\sqrt{-1}$ ایک تخیلی قیمتون مین سی لا کی ہو تو اسکی مطابق ی کی قیمت یہہ ہوگی کہ

$$\text{سہ} + \text{صہ}\sqrt{-1} + \frac{1}{\text{سہ} + \text{صہ}\sqrt{-1}} \quad \text{یعنی} \quad \text{سہ} + \text{صہ}\sqrt{-1} + \frac{\text{سہ} - \text{صہ}\sqrt{-1}}{\text{سہ}^2 + \text{صہ}^2}$$

اور یہہ برابر ایک حقیقی مقدار کے ہی یعنی ۲سہ کے بشرطیکہ یہہ ثابت ہو کہ $\text{سہ}^2 + \text{صہ}^2 = 1$ اب یہہ ہم ثابت کرینگے کہ $\text{سہ}^2 + \text{صہ}^2$ برابر ۱ کے ہے

چونکہ $\text{سہ} + \text{صہ}\sqrt{-1}$ ایک قیمت مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} \mp 1 = 0$ کی ہی تو بموجب دفعہ ۱۴۱ کے $\text{سہ} - \text{صہ}\sqrt{-1}$ یہی قیمت مساوات کی ہوگی پس

$(\text{سہ} + \text{صہ}\sqrt{-1})^{\text{ن}} = \pm 1$ اور $(\text{سہ} - \text{صہ}\sqrt{-1})^{\text{ن}} = \pm 1$

اب ضرب دینی $(\text{سہ}^2 + \text{صہ}^2)^{\text{ن}} = 1$ اسیواسطے $\text{سہ}^2 + \text{صہ}^2 = \pm 1$

اور $\text{سہ}^2 + \text{صہ}^2$ مثبت ہی اسلئی $\text{سہ}^2 + \text{صہ}^2$ برابر ۱ کے ہوا

(۱۶۰) اب ہم بعض مثالین معادلات

$\text{لا}^{\text{ن}} + 1 = 0$ اور $\text{لا}^{\text{ن}} - 1 = 0$ کی لکھتے ہین

(۱) $\text{لا}^3 - 1 = 0$ اسی معلوم ہوتا ہے کہ $(\text{لا} - 1)(\text{لا}^2 + \text{لا} + 1) = 0$

اسی معلوم ہوا کہ قیمتین ۱ اور $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ ہی پس یہہ تین قیمتین +۱ کی تین جذر الکعب ہین اور اونکی علامتین بدلنی سی ہم کو تین جذر الکعب -۱ کے حاصل ہوتی ہین یا اسکو یون بیان کرو کہ مساوات $\text{لا}^3 + 1 = 0$ کی قیمتین حاصل ہوتی ہین

(۲) لا^{۴} + ۱ = ۰ مین لا + $\frac{۱}{\text{لا}}$ = ی کے رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ ی^{۲} − ۲ = ۰

پس ی = ± $\sqrt{۲}$

اسیواسطے لا^{۴} + ۱ = (لا^{۲} + لا $\sqrt{۲}$ + ۱) (لا^{۲} − لا $\sqrt{۲}$ + ۱)

ان دوم درجون کی مساواتون کی قیمتون کی دریافت کرنی سی حل کامل ہوجایگا

(۳) لا^{۵} − ۱ = ۰ اسی حاصل ہوتا ہی کہ (لا − ۱) (لا^{۴} + لا^{۳} + لا^{۲} + لا + ۱) = ۰

اسی معلوم ہوتا ہی کہ مساوات لا^{۲} + $\frac{۱}{\text{لا}^{۲}}$ + لا + $\frac{۱}{\text{لا}}$ + ۱ = ۰ یعنی

ی^{۲} + ی − ۱ = ۰ کی حل ہونی چاہی پس ی = $\frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

اسیواسطے لا^{۵} − ۱ = (لا − ۱) (لا^{۲} + لا $\frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}$ + ۱) (لا^{۲} + لا $\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$ + ۱)

ان دوم درجہ کی مساواتون کے حل کرنی سی کامل حل ہوجایگا اور قیمتون کی علامتین بدل دین تو وہ مساوات لا^{۵} + ۱ = ۰ کی قیمتین بنجاینگی

(۱۶۱) اگر ہم مساوات لا^{۷} − ۱ = ۰ کی حل کرنی مین کوشش کرین تو ہم کو مساوات ی کی تیسری درجہ کی حاصل ہوگی اور اگر مساوات لا^{۹} − ۱ = ۰ کے حل کرنے مین سعی کرین تو ی کی چوتھی درجہ کی مساوات حاصل ہوگی اباگی دو بابون مین بتلائینگے کہ تیسری اور چوتھی درجہ کی مساواتین کسطرح حل ہوتی ہین یہہ بات معلوم ہوجایگی کہ حل کی ترکیبین عملاً کسی کام کی نہین ہوتین جبکہ معادلات جنکو حل کرتی ہین تمام حقیقی قیمتین رکہتی ہون جیسی کہ یہان صورت ہی جسپر بحث موافق دفعہ ۱۵۹ کے ہم کرتے ہین

(۱۶۲) اگر مساوات لا^{۲ن} + ع لا^{ن} + ق = ۰ کی صورت کی ہو تو ہم مساوات درجہ دوم کے موافق حل کرکی لا^{ن} کی قیمتین دریافت کرتی ہین اور پہر موافق اس باب کی ترکیبون کے لا کی قیمتین دریافت ہوسکتی ہین

اب یہان ہم ایک دعوی دو مقادیر اصم کی حاصل ضرب کے باب مین ثابت کرکی اس باب کو ختم کرتی ہین۔

(۱۶۳) فرض کرو کہ ا اور ب دو مقادیر جذریہ ہون اور م اور ن صحاح مثبتہ ہون تو ہم ا$^{\frac{م}{ن}}$

کی م مختلف قیمتیں ہونگیں اور $\sqrt[ن]{ب}$ کی ن مختلف قیمتیں موافق دفعہ ۱۴۲ کے ہونگیں اسی معلوم ہوا کہ $\sqrt[م]{ا}$ اور $\sqrt[ن]{ب}$ کی حاصل ضرب کی م ن مختلف قیمتوں سے زیادہ قیمتیں نہیں ہوسکتیں اور اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ اوسکی اتنی قیمتیں نہیں ہوسکتیں بشرطیکہ م اور ن متباین نہ ہوں اور اس دعوی سی پہلی اس دعوی کو ثابت کرینگے کہ $\sqrt[م]{ا}$ اور $\sqrt[ن]{ب}$ کی حاصل ضرب کے مختلف قیمتیں م اور ن کی ذو اضعاف اقل کی برابر ہوتی ہیں

فرض کرو کہ $\sqrt[م]{ا}$ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت ط ہو تو تمام قیمتیں $\sqrt[م]{ا}$ کی ط $\sqrt[م]{۱}$ میں شامل ہونگیں اور فرض کرو کہ $\sqrt[ن]{ب}$ کی قیمتوں میں سی ص ایک قیمت ہو تو $\sqrt[ن]{ب}$ کی تمام قیمتیں ص $\sqrt[ن]{۱}$ میں داخل ہونگیں اسی معلوم ہوا کہ تمام قیمتیں حاصل ضرب کے ط ص × $\sqrt[م]{۱}$ × $\sqrt[ن]{۱}$ میں داخل ہیں اور اسواسطے حاصل ضرب کے مختلف قیمتوں کی تعداد وہی ہوگی جو $\sqrt[م]{۱}$ × $\sqrt[ن]{۱}$ کی ہے فرض کرو کہ م اور ن کا ذو اضعاف اقل ل ہی تو $(\sqrt[م]{۱} \times \sqrt[ن]{۱})^{ل} = ۱$

پس $\sqrt[م]{۱} \times \sqrt[ن]{۱}$ برابر واحد کے ل مرتبہ کے جذر کی ہی اسواسطی ل مختلف قیمتوں سے زیادہ قیمتیں نہیں ہوسکتیں

لیکن ہم کو یہہ ثابت کرنا باقی رہا کہ $\sqrt[م]{۱} \times \sqrt[ن]{۱}$ فی الحقیقت ل مختلف قیمتیں رکھتا ہے

فرض کرو کہ ع وفق اعظم م اور ن کا ہی اور $\frac{م}{ع}$ = لو پس $\sqrt[لو]{۱}$ کی لو قیمتیں $\sqrt[م]{۱}$ کی م قیمتوں میں داخل ہیں اور $\sqrt[م]{۱} \times \sqrt[ن]{۱}$ کی ل قیمتیں اسطرح حاصل ہوسکتی ہیں کہ $\sqrt[لو]{۱}$ کی لو قیمتوں اور $\sqrt[ن]{۱}$ کی ن قیمتوں کے حاصل ضرب کے مختلف ارقام لیں اور یہہ رقمیں سب مختلف ہونگیں اسواسطے کہ فرض کرو لو قیمتوں میں سی دو قیمتیں سہ اور سَہ ہیں اور ن قیمتوں میں سی صہ اور صَہ دو قیمتیں ہیں تو سہ صہ برابر سَہ صَہ کی نہیں ہوسکتا اسواسطی کہ اگر سہ صہ = سَہ صَہ تو $\frac{سہ}{سَہ} = \frac{صَہ}{صہ}$ دائیں طرف کا رکن ایک قیمت مساوات $لا^{لو} - ۱ = ۰$ کی ہی اور بائیں طرف کا رکن ایک قیمت مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی ہے اور ان مساواتوں کی کوئی قیمت مشترک سوا ر واحد کے بموجب دفعہ ۱۴۷ کے نہیں ہوسکتی

(۱۴۸) بعض اوقات دفعہ گذشتہ کے اصل اصول اسطرح بیان کئے جاتے ہیں کہ ہم کو معلوم ہے کہ $\sqrt[م]{ا} \times \sqrt[ن]{ا} = \sqrt[م ن]{ا^{م+ن}}$ اور

اگر م + ن / م ن کو مختصر الحدین بنائین تو شمار کنندہ ایک صحیح عدد ہوگا اور ا اور نسب نمار ہوگا اسطرح ا م+ن / ا م ن = ا ر اور اسکی مختلف قیمتین ہین یہہ ترکیب اثبات کی مضحمل ہی کیونکہ جبر مقابلہ مین جو معمولی مسئلہ مقادیر اصم کا لکھا گیا ہی وہ مقادیر اصم کی حسابیہ قیمتون کے واسطے ثابت کیا گیا ہی اسواسطے اوسی یہہ ارتباط ۱/م + ۱/ن = ا م+ن / ا م ن موافق اوس معنی کے جو یہان لی گئی ہین نہین ثابت ہوتا ہے

بارہوان باب معادلات مکعبی

(۱۶۵) مساوات درجہ دوم کی حل کرنے کی بابمین بحث کرنی یہان فضول ہی اسلیئے کہ اسکا مفصل حال جبر مقابلہ مین بیان ہو چکا ہی اس باب مین فقط درجہ سوم کی مساواتون سی جنکو معادلات مکعبی کہتے ہین بحث ہوگی

دفعہ ۱۵۸ مین ہم نی یہہ ثابت کیا ہی کہ مساوات مفروضہ کی ایسی ہیئت بدل سکتی ہے کہ اوسمین دوسری رقم نہو جس مساوات مکعبی مین دوسری رقم نہ ہو اوسکی قیمتون کی بہت صفات صاف جملی بہ نسبت کامل مساوات مکعبی کے قیمتون کی ہوتی ہین اسلیئے ہم یہہ فرض کرلیتے ہین کہ جن مکعبی مساواتون کو ہم حل کرتے ہین اونمین دوسری رقم نہین ہے جس عمل کو اب ہم لکھینگے اوسکا نام کارڈن کا حل مکعبی مساوات کا ہے

(۱۶۶) مساوات لا۳ + ق لا + ر = ۰ کو حل کرو

فرض کرو کہ لا = د + ی اور د اور ی بالفعل دو مقادیر مجہول ہین

اسکو مساوات مفروض مین لا کی جگہ رکھو تو

(د + ی)۳ + ق (د + ی) + ر = ۰

یعنی د۳ + ی۳ + (۳ د ی + ق) (د + ی) + ر = ۰

ہم نی صرف دو مقادیر د اور ی کی بابمین ایک یہہ بات فرض کی ہی کہ اونکا مجموعہ مساوات مفروضہ کی ایک قیمت ہو اسلیئے ہم کو اختیار ہی کہ کوئی دوسری بات بھی اونکی باب مین فرض کرین جب وہ دو مقداریں مجہول ہین اونکی واسطے دو شرائط مقرر کر سکتی ہین پس فرض کرو کہ ۳ د ی + ق = ۰

تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$د^3 + ی^3 + ر = ۰$$

ی کی قیمت ارقام د مین مندرج کرو تو

$$د^3 - \left(\frac{ق}{۳د}\right)^3 + ر = ۰$$

یعنی $د^6 + ر د^3 - \frac{ق^3}{۲۷} = ۰$

اسی معلوم ہوا کہ $د^3 = -\frac{ر}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{ر^2}{۴} + \frac{ق^3}{۲۷}\right)}$

اور $ی^3 = -ر - د^3 = -\frac{ر}{۲} \mp \sqrt{\left(\frac{ر^2}{۴} + \frac{ق^3}{۲۷}\right)}$

اور نیز لا = د + ی اب ہم $د^3$ اور $ی^3$ کے قیمتون مین اوپر کی علامت لین تو اور نیچے کی لین تو دونو صورتون مین ایک ہی نتیجہ حاصل ہوگا صفائی کی واسطی ہم اوپر ہی کی علامت لیتے ہین تو

$$لا = \left[-\frac{ر}{۲} + \sqrt{\left(\frac{ر^2}{۴} + \frac{ق^3}{۲۷}\right)}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{ر}{۲} - \sqrt{\left(\frac{ر^2}{۴} + \frac{ق^3}{۲۷}\right)}\right]^{\frac{1}{3}}$$

پس لا کے واسطی جو جملہ ہی اوسمین دو جذر الکعب ہین اور ہر مقدار کے تین جذر الکعب ہین تو اب ہم کو یہہ دریافت کرنا چاہئی کہ بالفعل کونسی جذر الکعب لینی چاہئی فرض کرو کہ

$$س = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{-3}\right)$$

تو بموجب دفعہ ۱۶۰ کے اکی تین جذر الکعب ۱ اور س اور $س^2$ ہین اب فرض کرو کہ $\frac{ر}{۲} + \sqrt{\left(\frac{ر^2}{۴} + \frac{ق^3}{۲۷}\right)}$ کمعبون مین سی ایک جذر الکعب م ہی تو اور جذر الکعب م س اور م $س^2$ ہونگے اور $-\frac{ر}{۲} - \sqrt{\left(\frac{ر^2}{۴} + \frac{ق^3}{۲۷}\right)}$ کے جذر الکعبون مین سی ایک جذر الکعب کو ن تعبیر کرتا ہی تو اور جذر الکعب ن س اور ن $س^2$ ہین

لا کے جملے مین جو جذر الکعب واقع ہوتی ہین اونمین سی ہر ایک کی واسطی اوسکی تین قیمتون میں سے ہر ایک قیمت لگائین تو ہم کو کل نو قیمتین حاصل ہونگین لیکن مکعبی مساوات کی صرف تین قیمتین ہوتی ہین تو اسی یہہ نتیجہ نکلتا ہی کہ اون نو قیمتون مین سی صرف تین قیمتین مساوات مین دخل رکھتی ہین اور باقی خارج ہین اور فی الحقیقت عمل حل مین $د ی = -\frac{ق}{۳}$

ایک شرط ہی پس جو قیمتین اس شرط کو پورا کرین وہی قیمتین مساوات مین دخل رکھتی ہین فرض کرو کہ م اور ن ایسی مقرر کئی گئی ہین کہ وہ شرط م ن = − ق/۳ کو پورا کرتے ہین تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ ر = م اور ی = ن کے قیمتین دخل پذیر ہونگین اور ر = سم اور ی = س۲ ن کی بہی حاصل ہوگا اور ر = س۲ م اور ی = س ن کے بہی حاصل ہوگا کیونکہ دو تو صورتون مین ارتباط ر ی = − ق/۳ کی شرائط پوری ہوتی ہین مگر کوئی اور زوج قیمتون کا دخل نہین ہو سکتا تمثیلاً فرض کرو کہ ر = م اور ی = س ن تو ر ی = − س ق/۳ کی حاصل ہوگا اور − ق/۳ کی برابر نہین حاصل ہوگا اور ایسی ہی اور زوج قیمتون سی ر ی = − س ق/۳ یا = − س۲ ق/۳ کے حاصل ہوگا اور − ق/۳ نہین حاصل ہوگا اسلئی سوا ان ازواج قیمتون کی جنکی دخل کی کیفیت اوپر بیان کرائی ہی اور کوئی زوج قیمتون کا شرائط کو ایفا نہین کریگا

(۱۶۷) تمثیلاً فرض کرو کہ لا۳ + ۶لا − ۲۰ = ۰ یہان ق = ۶ اور ر = − ۲۰ پس

لا = (۱۰ + √۱۰۸)^(۱/۳) + (۱۰ − √۱۰۸)^(۱/۳)

عددی حساب لگانے سے یہہ حاصل ہوگا کہ

(۱۰ + √۱۰۸)^(۱/۳) = ۲٫۷۳۲ اور (۱۰ − √۱۰۸)^(۱/۳) = − ٫۷۳۲

پس اسی ہم گمان کرتی ہین کہ لا = ۲ کے ہوگا اور امتحان سی یہہ معلوم ہی ہوگا کہ لا = ۲ کی ہی اب اور دو قیمتون کی بیان کرنی کی واسطی موافق دفعہ گذشتہ کی عمل کرنے کیلئے یہہ بہتر ہوگا کہ ہم مساوات کا تنزل مساوات درجہ دوم کی طرف کرین چونکہ ۲ قیمت مساوات مفروضہ کی ہی اسلئی لا۳ + ۶لا − ۲۰ پورا لا − ۲ پر تقسیم ہوگا اور یہہ ہم کو دریافت ہوگا کہ

لا۳ + ۶لا − ۲۰ = (لا − ۲) (لا۲ + ۲لا + ۱۰)

اسواسطے باقی دو قیمتین مساوات کی اس مساوات

لا۲ + ۲لا + ۱۰ = ۰

کے حل کرنے سے یہہ دریافت ہونگین کہ

$$-۱ \pm \sqrt{-۹} \text{ اور } -۱ \pm ۳\sqrt{-۱}$$

مثال گذشتہ مین ہم امتحان سی یہہ ثابت کرتے ہین کہ

$$(۱۰ + \sqrt{۱۰۸})^{\frac{۱}{۳}} = ۱ + \sqrt{۳} \text{ اور } (۱۰ - \sqrt{۱۰۸})^{\frac{۱}{۳}} = ۱ - \sqrt{۳}$$

پس اسطرح قیمت ۲ تعبیر نزدول نکالنی کی دریافت ہوگی کوئی عمل جبریہ ایسا نہین ہے کہ اوسی علی العموم جزء الکعب اس جملہ ا + $\sqrt{ب}$ کی صورت کا محدود صورت مین نکال لین دفعہ ۳۱۰ جبر مقابلہ کی دیکھو اصلئی (ا + $\sqrt{ب}$)$^{\frac{۱}{۳}}$ کی قیمت دریافت کرنی کی واسطی ضابطہ جملہ ثنائی کو کام مین لاکر لانہایت سلسلہ دریافت کرتی ہین اور اس حالت مین اگر $\sqrt{ب}$ کم ا سے ہو تو اس سلسلہ کی انضمامی بنانی کی واسطی سلسلہ کو قوا متصاعدہ $\frac{ب}{ا}$ مین پہیلائن اور اگر $\sqrt{ب}$ بڑا ا سے ہو تو سلسلہ کو $\frac{ا}{ب}$ کی قوا متصاعدہ مین پہیلائین جبر مقابلہ کا باب ۳۶ اور ۴۰ دیکھو

(۱۶۸) دفعہ ۱۶۶ مین ہم نی لکھا ہی کہ گو لا کیواسطی ظاہر نو قیمتین نکلتی ہین مگر اونمین سی تین مساوات مین دخل رکھتی ہین اور باقی خارج ہین اب ان نو قیمتون کی واقع ہونی کی دلیل یہہ ہی کہ ارتباط ی ذ = - $\frac{ق}{۳}$ فرض کیا گیا تہا اور پہر اوسکی صورت عمل کے اندر ی^۳ ذ^۳ = - $\frac{ق^۳}{۲۷}$ مین تبدیل کی گئی ہی اب اس اخر ارتباط مین کچہہ تبدل نہ ہوگا اگر

ق بدل کر س ق یا س^۲ ق ہو گا پس مساوات لا^۳ + ق لا + ر = ۰ کے حل کرنے مین نو حل ہم کو دریافت ہوتی ہین اونمین سی تین تو اس مساوات سی متعلق ہوتی ہین اور تین مساوات لا^۳ + ق س لا + ر = ۰ سی اور تین مساوات لا^۳ + ق س^۲ لا + ر = ۰ سے

(۱۶۹) مکعبی مساوات مفروضہ کی قیمتون کی صورت پر اب ہم خاص بحث کرتے ہین ق اور ر کو ہم اصلی مقادیر فرض کرینگے ی^۳ اور ذ^۳ کے واسطی جبلی کیا تو اصلی ہون گے یا خیالی اول فرض کرو کہ یہہ جبلی اصلی ہین تو ی^۳ اور ذ^۳ کے جزء الکعبون کی حسابی قیمتون کو فرض کرو کہ م اور ن تعبیر کرتی ہین تو مکعبی مساوات مفروض کی اس صورت مین یقینی ایک اصلی قیمت یعنی م + ن ہو

اور باقی دو قیمتین م سہ + ن سہ² اور م سہ² + ن سہ ہونگین اور سہ کی قیمت مندرج کرنے سے جداگانہ یہہ قیمتین ہونگین کہ

− ½ (م + ن) + ½ (م − ن) √−۳

اور − ½ (م + ن) − ½ (م − ن) √−۳

اور یہہ تخیلی قیمتین ہین بشرطیکہ م = ن کے نہ ہو اور جب م = ن تو مکعبی مساوات کی دو برابر قیمتین ہونگین اور ہریک اونمین سے برابر − م یا − ن کے ہوگی اس شرط ضروری جسمی یہہ تحقیق ہوجاے کہ م = ن یعنی ۃ³ = ی³ کے یہہ ہی کہ ر²/۴ + ق³/۲۷ = ۰

بالعکس اسکے اگر مکعبی مساوات کی قیمتین تمام اصلی ہون اور غیر مساوی ہون تو ۃ³ اور ی³ کی جملی تخیلی ہونگی یہہ فرض کرو کہ ۃ³ اور ی³ کی جملی خیالی ہین یعنی فرض کرو کہ ر²/۴ + ق³/۲۷ منفی مقدار ہی تو بموجب دفعہ ۱۴۲ کی ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ ۃ³ اور ی³ مین سے ہریک کا جزر الکعب خاص صورت کا ہوگا اسیواسطے ہم فرض کرتی ہین کہ م = لو + مو √−۱ اور چونکہ ی³ اور ۃ³ مین فرق علامت جذر ہی اسلئے ن = لو − مو √−۱ اس صورت مین مکعبی مساوات مفروضہ کی تمام اصلی قیمتین یہہ ہین یعنی

لو + مو √−۱ + لو − مو √−۱ یعنی ۲ لو ہے

(لو + مو √−۱) سہ + (لو − مو √−۱) سہ² یعنی − لو − مو √۳

اور (لو + مو √−۱) سہ² + (لو − مو √−۱) سہ یعنی − لو + مو √۳

(۱۷۰) مکعبی مساوات کا حل جو کارڈن صاحب کا ہی اوس سے عملاً ایسی صورت مین کچھہ فایدہ نہین حاصل ہوتا کہ مساوات کی سب قیمتین اصلی اور غیر مساوی ہون اسواسطی کہ اس حالت مین جملی ۃ³ اور ی³ کے تخیلی ہوتی ہین اور گو ہم اس بات کو جانتے ہین کہ اونکی جزر الکعب وجود رکھتے ہین مگر کوئی ترکیب اونکی نکالنی کی از روی علم حساب نہین ہی پس ایسی صورت مین ہم کو قیمتین صورت جبریہ مین معلوم ہوجاتی ہین مگر اونکا حساب عددی نہین ہوسکتا اسلئی وہ حساب کچھہ وقعت نہین رکھتی تمثیلاً یہہ مساوات لو کہ

$$لا^{۳} - ۱۵ لا - ۴ = ۰$$

یہان ر = -۴ اور ق = -۱۵ اسے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$لا = (۲ + \sqrt{-۱۲۱})^{\frac{۱}{۳}} + (۲ - \sqrt{-۱۲۱})^{\frac{۱}{۳}}$$

یعنی $$لا = (۲ + ۱۱\sqrt{-۱})^{\frac{۱}{۳}} + (۲ - ۱۱\sqrt{-۱})^{\frac{۱}{۳}}$$

اب یہان ظاہر ہی کہ کوئی جزء المکعب نکالنی کا طریق نہین ہی امتحان سی یہہ ثابت ہوتا ہی کہ

$$(۲ + ۱۱\sqrt{-۱})^{\frac{۱}{۳}} = ۲ + \sqrt{-۱}$$

$$(۲ - ۱۱\sqrt{-۱})^{\frac{۱}{۳}} = ۲ - \sqrt{-۱}$$

پس $لا = ۲ + \sqrt{-۱} + ۲ - \sqrt{-۱} = ۴$

پس ۴ قیمت ہی اب اور قیمتین دفعہ ۱۶۹ اسی دریافت ہو سکتی ہین یا اسطرح عمل کرنی سی کہ

$$لا^{۳} - ۱۵ لا - ۴ = (لا - ۴)(لا^{۲} + ۴ لا + ۱)$$

پس ہم کو یہہ مساوات حل کرنی پڑیگی کہ $لا^{۲} + ۴ لا + ۱ = ۰$ اور اسکی قیمتین $-۲ \pm \sqrt{۳}$ ہین

اب مساوات $لا^{۳} - ۳ \sqrt[۳]{۲}\, لا - ۲ = ۰$ پر خیال کرو

یہان ر = -۲ اور ق = $-۳\sqrt[۳]{۲}$ پس

$$لا = (۱ + \sqrt{-۱})^{\frac{۱}{۳}} + (۱ - \sqrt{-۱})^{\frac{۱}{۳}}$$

یہہ امتحان سے ثابت ہوتا ہے کہ

$$(۱ + \sqrt{-۱})^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱ + \sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}} + \sqrt{-۱}\,\frac{۱ - \sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}}$$

$$(۱ - \sqrt{-۱})^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱ + \sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}} - \sqrt{-۱}\,\frac{۱ - \sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}}$$

پس $لا = \frac{۱ + \sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}} + \sqrt{-۱}\,\frac{۱ - \sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}} + \frac{۱ + \sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}} - \sqrt{-۱}\,\frac{۱ - \sqrt{۳}}{۲\sqrt[۳]{۲}} = \frac{۱ + \sqrt{۳}}{\sqrt[۳]{۲}}$

اور باقی قیمتین دریافت ہو سکتی ہین اور وہ یہہ ہین کہ

$$\frac{۱ - \sqrt{۳}}{\sqrt[۳]{۲}} \text{ اور } -\frac{۲}{\sqrt[۳]{۲}}$$

(۱۷۱) جو صورت مکعبی مساوات کی ایسی ہو کہ اوسکی تین قیمتین اصلی اور غیر مساوی ہوں اوس صورت کو معدوم التحویل کہتی ہین

اور بعض اوقات یہہ کہتی ہین کہ اس صورت مین قاعدہ کارڈن کا نہین چلتا ان جملون سی یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ جسمین ایسی صورتین نمایان ہوتی ہین کہ اونکی حسابگائی مین بڑی دقت اور دشواری عاید ہوتی ہی لیکن ضابطہ جملہ ثنائی کی استعانت سی جملہ $ع + ق\sqrt{-1}$ کی صورت کی جملہ کی تقریبی قیمت ہم دریافت کرتی ہین اگر ق تعداداً چھوٹا ع سی ہو تو $(ع + ق\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ کو سلسلہ انضمامی مین موافق قواعد متصاعدہ $ق\sqrt{-1}$ کے پھیلائین جبر مقابلہ ۳۴ باب دیکھو پس

$(ع + ق\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ کو تقریباً $عَ + قَ\sqrt{-1}$ کے صورت مین لاسکتی ہین

اور $(ع - ق\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ کو تقریباً $عَ - قَ\sqrt{-1}$ کی صورت مین

اور مجموعہ ان جزر الکعبون کا ۲ عَ ہوگا لیکن اگر ق تعداداً بڑا ع سی ہو تو ہم اسطرح عمل کرین کہ

$$ع + ق\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\,(ق - ع\sqrt{-1})$$

اسی معلوم ہوا کہ $(ع + ق\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\,(ق - ع\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$

اب $-\sqrt{-1}$ کا جزر الکعب امتحان سی $\sqrt{-1}$ معلوم ہوتا ہی پس یہہ حاصل ہوگا

$$(ع + ق\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = -\sqrt{-1}\,(ق - ع\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$$

اور ہم $(ق - ع\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ کو سلسلہ انضمامی مین قواعد متصاعدہ $ع\sqrt{-1}$ کی پھیلا سکتی ہین اور پھر موافق سابق کی مجموعہ $ع + ق\sqrt{-1}$ اور $ع - ق\sqrt{-1}$ کا دریافت کرسکتی ہین

یہہ صورت کہ ع = ق کے دفعہ گذشتہ کی دوسرے مثال مین شامل ہی

اس بات پر بھی غور کرنی چاہیی کہ ضابطہ ڈی موئور کے وساطت سی مقدار $ع + ق\sqrt{-1}$ کا جزر الکعب ایسی صورت مین بیان ہوسکتا ہے کہ اوسمین علم مثلثی جملے ملتف ہون

(۱۷۲) دفعات گذشتہ سی ظاہر ہوتا ہے کہ مکعبی مساوات $لا^{3} + ق لا + ر = 0$ ہمیشہ کارڈس کے عمل سی حل ہوسکتی ہی اور جب ق مساوات مین مثبت ہو تو کچھہ دقت اوسمین نہین واقع ہوتی اور جب ق منفی ہو اور اوسکی ساتھہ $ق^{3}$ تعداداً چھوٹی $\frac{۲۷ر^{2}}{۴}$ سی ہو تو ان صورتون مین قیمتین خیالی ہونگین اگر $ق^{3}$ ایک منفی مقدار ہو اور تعداداً بڑی $\frac{۲۷ر^{2}}{۴}$ سی ہو تو کارڈن

کے حل میں بڑی دقت ہوتی ہی اور اس صورت میں تمام قیمتیں اصلی ہیں

اگر ق^3 منفی ہو اور تعداداً برابر $\frac{27\,\text{ر}^2}{4}$ ہو تو $\frac{\text{ر}^2}{4} + \frac{\text{ق}^3}{27} = 0$ تو بموجب دفعہ ٦٠ کے

اوسکی قیمتیں برابر ہونگیں بموجب دفعہ ١٦٦ کے اس صورت میں $\text{م} = \text{ن} = \sqrt[3]{-\frac{\text{ر}}{2}}$

اور تینوں قیمتیں ٢م اور −م اور −م ہیں

جس صورت میں مکعبی مساوات کی قیمت ایک معلوم ہو جاے تو مکعبی مساوات کا تنزل مساوات درجہ دوم کی طرف کرلیں اور اس مساوات درجہ دوم سے دو قیمتیں دریافت کرلیں اور دفعہ گذشتہ کی ترکیب سے قیمتوں کو نہ دریافت کریں

(١٧٣) کامل مکعبی مساوات کی حل کرنے میں جو نتایج حاصل ہوتے ہیں اوسکا مختصراً بیان کرتی ہیں فرض کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^3 + \text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{لا} + \text{س} = 0$$

میں فرض کرو کہ $\text{لا} = \text{ی} - \frac{\text{ا}}{3}$ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ی}^3 + \text{ق}\,\text{ی} + \text{ر} = 0$$

اسمیں $\text{ق} = \text{ب} - \frac{\text{ا}^2}{3}$ اور $\text{ر} = \text{س} - \frac{\text{ا}\,\text{ب}}{3} + \frac{2\,\text{ا}^3}{27}$

اب بموجب ترکیب کارڈن کے

$$\text{لا} = \left(-\frac{\text{ر}}{2} + \sqrt{\frac{\text{ر}^2}{4} + \frac{\text{ق}^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{\text{ر}}{2} - \sqrt{\frac{\text{ر}^2}{4} + \frac{\text{ق}^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

اسے یہہ دریافت ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{ر}^2}{4} + \frac{\text{ق}^3}{27} = \frac{\text{س}^2}{4} - \left(\frac{\text{ا}\,\text{ب}}{6} - \frac{\text{ا}^3}{27}\right) + \frac{\text{ب}^2}{27}\left(\text{ب} - \frac{\text{ا}^2}{4}\right)$$

(١٧٤) بعض معادلات مکعبی جسمیں امثال کی خاص قیمتیں ہوں بغیر کارڈن کی ترکیب کے بہی حل ہوجاتی ہیں

مثلاً فرض کرو کہ

$$\text{لا}^3 + 3\,\text{لا} = \text{ا}^3 - \text{ا}^{-3}$$

اسکو اسطرح لکہہ سکتی ہیں کہ

$$\text{لا}^3 + 3\,\text{لا} = \left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ا}}\right)^3 + 3\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ا}}\right).$$

یعنی $\text{لا}^{۳} - \left(\text{ا} - \frac{۱}{\text{ا}}\right)^{۳} + ۳\left[\text{لا} - \left(\text{ا} - \frac{۱}{\text{ا}}\right)\right] = ۰$

اسمین ظاہر ہی کہ ایک قیمت $\text{لا} = \text{ا} - \frac{۱}{\text{ا}}$

اب پھر فرض کرو یہہ مکعبی مساوات کامل ہے کہ

$$\text{لا}^{۳} + \text{ا}\,\text{لا}^{۲} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{س} = ۰$$

اور مثال کی درمیان یہہ ارتباط $۲\,\text{ا}\,\text{س} = \text{ب}^{۲}$ ہی تو مساوات مفروضہ اسطرح لکھی جائینگی

$$-\text{لا}^{۳} = \text{ا}\,\text{لا}^{۲} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{س}$$

اسیواسطے $-۳\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{لا}^{۳} = ۳\,\text{ب}\,\text{ا}^{۲}\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{ب}^{۲}\,\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}^{۳}$

اسیواسطے $(\text{ا}^{۳} - ۳\,\text{ا}\,\text{ب})\,\text{لا}^{۳} = \text{ا}^{۳}\,\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{ب}\,\text{ا}^{۲}\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{ب}^{۲}\,\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}^{۳} = (\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب})^{۳}$

اسیواسطے $\text{لا}\sqrt[۳]{\text{ا}^{۳} - ۳\,\text{ا}\,\text{ب}} = \text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}$

اسیواسطے $\text{لا} = \dfrac{\text{ب}}{\sqrt[۳]{\text{ا}^{۳} - ۳\,\text{ا}\,\text{ب}} - \text{ا}}$

(۱۷۵) علم مثلث مستوی کی ۷ اباب مین ایکبار لکھا ہی جسی کہ ہم مساوات درجہ سوم معدوم التحویل کے قیمتین بذریعہ جداول علم مثلثی کی دریافت کرسکتی ہین یہہ بات عملاً تو کسی کام کی نہین ہے لیکن ہم یہہ بتلائینگی کہ علم مثلثی جدولین کسطرح اون مثالون کی حل کرنی مین بہی کام اتی ہین جو صورت معدوم التحویل سی متعلق نہین ہین

فرض کرو کہ $\text{لا}^{۳} + \text{ق}\,\text{لا} + \text{ر} = ۰$ لو

$$\text{لا} = \left(-\frac{\text{ر}}{۲} + \sqrt{\frac{\text{ر}^{۲}}{۴} + \frac{\text{ق}^{۳}}{۲۷}}\right)^{\frac{۱}{۳}} + \left(-\frac{\text{ر}}{۲} - \sqrt{\frac{\text{ر}^{۲}}{۴} + \frac{\text{ق}^{۳}}{۲۷}}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

اگر ق مثبت ہی تو فرض کرو کہ $\frac{\text{ق}^{۳}}{۲۷} = \frac{\text{ر}^{۲}}{۴}\,\text{مس}^{۲}\,\text{بر}$ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{لا} = \left(-\frac{\text{ر}}{۲} + \frac{\text{ر}}{۲}\,\text{قط}\,\text{بر}\right)^{\frac{۱}{۳}} + \left(-\frac{\text{ر}}{۲} - \frac{\text{ر}}{۲}\,\text{قط}\,\text{بر}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

$$= \left(-\frac{\text{ر}}{\text{جم}\,\text{بر}}\right)^{\frac{۱}{۳}}\left[\left(\text{جم}\,\frac{\text{بر}}{۲}\right)^{\frac{۲}{۳}} - \left(\text{جب}\,\frac{\text{بر}}{۲}\right)^{\frac{۲}{۳}}\right]$$

اگر ق منفی ہو اور $۴\,\text{ق}^{۳}$ تعداد مین چہوٹا $۲۷\,\text{ر}^{۲}$ سی ہو تو فرض کرو $\frac{\text{ق}^{۳}}{۲۷} = -\frac{\text{ر}^{۲}}{۴}\,\text{جب}^{۲}\,\text{بر}$ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{لا} = \left(-\frac{\text{ر}}{۲} + \frac{\text{ر}}{۲}\,\text{جم}\,\text{بر}\right)^{\frac{۱}{۳}} + \left(-\frac{\text{ر}}{۲} - \frac{\text{ر}}{۲}\,\text{جم}\,\text{بر}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

= (-ر) ۴/۳ [(جم ۲/۳)^۴ - (جب ۲/۳)^۳]

(۱۷۶) ایک مساوات عظیم تحقیقات ریاضیہ میں کثیر الوقوع ہی اوسپر بحث کرتی ہیں گو وہ اس باب کے خاص مطلب سے متعلق نہین ہے

ہم یہہ دعوی کرتی ہین کہ مساوات ح (لا) = ۰ تمام اصلی قیمتین ہونگیں اگر ح (لا)

(لا - ا) (لا - ب) (لا - س) - اَ^۲ (لا - ا) - بَ^۲ (لا - ب) - سَ^۲ (لا - س) - ۲ اَ بَ سَ کو تعبیر کری مساوات کو اسطرح لکھہ سکتی ہین کہ

(لا - ا) [(لا - ب) (لا - س) - اَ^۲] - [بَ^۲ (لا - ب) + سَ^۲ (لا - س) + ۲ اَ بَ سَ] = ۰

فرض کرو کہ اس مساوات درجہ دوم

(لا - ب) (لا - س) - اَ^۲ = ۰

کی قیمتین ھ اور ک ہین اور ھ بہ نسبت ک کی کم ہی تو مساوات درجہ دوم کے حل کرنی سی یہہ معلوم ہوگا کہ ھ بڑا ب یا س سی ہی اور ک چھوٹا ب یا س سی ہی متواتر لا کی جگہ ح (لا) مین + ∞ و ھ و ک و - ∞ رکھو تو یہہ نتایج جداگانہ حاصل ہونگے

+ ∞ و - [بَ √(ھ - ب) + سَ √(ھ - س)]^۲ و [بَ √(ب - ک) + سَ √(س - ک)] و - ∞

پس مساوات ح (لا) = ۰ کی تین اصلی قیمتین ایک بڑی بہ نسبت ھ کی اور ایک درمیان ھ اور ک کی اور ایک چھوٹی بہ نسبت ک کے حاصل ہونگین

(۱۷۷) اب دو صورتین ایسی باقی ہین کہ اونکی توضیح اور تشریح زیادہ کرنی چاہی اونکا حل اس اثبات سی نہین ہوتا (۱) جس صورت مین ھ = ک (۲) جسمین ھ اور ک ایک قیمت طبعی مساوات کے ہو

فرض کرو کہ ھ = ک چونکہ قیمتین مساوات درجہ دوم کی برابر ہین اسلئی یہہ شرط ضرور ہوگی کہ (ب - س)^۲ + ۴ اَ^۲ = ۰ اسیواسطے ب = س اور اَ = ۰ اسی معلوم ہوتا ہے کہ س ایک قیمت طبعی مساوات کی ہوگا اور ح (لا) کو لا - س پورا تقسیم کریگا اور مساوات کو برابر صفر کے لکھنے سے مساوات درجہ دوم کی حاصل ہوگی جسکی اصلی قیمتین ہین

(۲) فرض کرو کہ صہ اور ک میں سی ایک مثلاً صہ قیمت مکعبی مساوات کی ہی تو دفعہ ۱۷۶ کی موافق عمل کرنی سی ثابت ہوتا ہی کہ مکعبی مساوات کی بہی ایک اصلی قیمت ہے جو چہوٹی ک سی ہے پس اوسکی دو اصلی قیمتین ہین ناگزیر تیسری قیمت بہی اصلی ہوگی اور اسیطرح اگر ک ایک قیمت مکعبی مساوات کی ہو تو ایک اصلی قیمت اوسکی بڑی بہ نسبت صہ کی ہوگی اسلئی ضرور ہی کہ تیسری قیمت بہی اصلی ہو

(۱۷۸) اب ہم اوس شرط کی تحقیقات کرتی ہین جسکی موافق صہ یا ک ایک قیمت مساوات مکعبی کے ہو

فرض کرو کہ لر ایک قیمت مساوات درجہ دوم اور درجہ سوم کی بہی ہے

چونکہ لر مساوات درجہ دوم کی ایک قیمت ہے اسلئی

(لر - ب) (لر - س) - اَ² = ۰ (۱)

اور چونکہ لر مساوات مکعبی کی بہی قیمت فرض کی گئی ہی اسلئی یہہ حاصل ہوگا کہ

بَ² (لر - ب) + سَ² (لر - س) + ۲ اَ بَ سَ = ۰ (۲)

(۱) اور (۲) سے یہہ مستنبط ہوتا ہے کہ

بَ² (لر - ب) + سَ² (لر - س) + ۲ بَ سَ √((لر - ب) (لر - س)) = ۰

یعنی [بَ √(لر - ب) + سَ √(لر - س)]² = ۰

اسیواسطی بَ² (لر - ب) = سَ² (لر - س) (۳)

(۲) اور (۳) سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

لر - ب = - اَسَ/بَ اور لر - س = - اَبَ/سَ (۴)

اور اسیواسطے ب - اَسَ/بَ = س - اَبَ/سَ (۵)

اسی ثابت ہوا کہ مکعبی مساوات کی مثال مین ارتباط (۵) ہونا چاہی تاکہ مساوات درجہ دوم کی قیمتون مین سی ایک قیمت مکعبی مساوات کی ایک قیمت ہو بالعکس اسکی اگر (۵) مستحکم ہو تو (۴) سی تحقیق کرکر لر کے واسطی ایک قیمت مقرر کرین تو دونو مساوات (۱) اور (۲) کی شرائط پوری ہوجائینگی پس مساوات درجہ دوم اور مساوات درجہ سوم کے

ایک قیمت مشترک ہوجائیگی

(۱۷۹) مساوات مکعبی کی قیمتون کی برابر ہونی کی شرائط ہم تحقیق کرتے ہین اگر ھ اور ک مین سی کوئی ایک ہی قیمت مکعبی مساوات کی نہ ہو تو دفعہ ۱۷۶ کی اثبات سی معلوم ہوتا ہے کہ مساوات مکعبی کی قیمتین غیر مساوی ہین دفعہ ۱۷۶ کا عمل ان دوم درجہ کی مساواتون مین سے ہر یک پر

$$(\text{لا}-\text{س})(\text{لا}-\text{ا})-\text{ب}'^{2}=0 \quad \text{یا} \quad (\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})-\text{س}'^{2}=0$$

بجای مساوات درجہ دوم $(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{س})=\text{ا}'^{2}=0$ کے چل سکتا ہے اسی ثابت ہوتا ہی کہ مکعبی مساوات کی برابر قیمتین نہین ہوسکتین جب تک اوسکی اور ان درجہ دوم کی مساواتون مین سی ایک مساوات کی قیمت مشترک نہ ہو

اسی ثابت ہوا کہ مساوات (۵) سی شرائط لابدی مساوات مکعبی کی برابر قیمتون کے واسطی یہہ حاصل ہونگین

$$\text{ا}-\frac{\text{ب}'\text{س}'}{\text{ا}'}=\text{ب}-\frac{\text{س}'\text{ا}'}{\text{ب}'}=\text{س}-\frac{\text{ا}'\text{ب}'}{\text{س}'}$$

بالعکس اسکی اگر یہہ شرائط مستحکم ہون تو مساوات مکعبی کی قیمتین برابر ہونگین دلیل اسکی یہہ ہے کہ ان برابر مقادیر کو ر سے تعبیر کرو

تو $\text{ا}=\text{ر}+\frac{\text{ب}'\text{س}'}{\text{ا}'}$ اور $\text{ب}=\text{ر}+\frac{\text{س}'\text{ا}'}{\text{ب}'}$ اور $\text{س}=\text{ر}+\frac{\text{ا}'\text{ب}'}{\text{س}'}$

ا اور ب اور س کی جگہ ان قیمتون کو مکعبی مساوات مین مندرج کرو تو

$$(\text{لا}-\text{ر})^{3}-(\text{لا}-\text{ر})^{2}\left(\frac{\text{ب}'\text{س}'}{\text{ا}'}+\frac{\text{س}'\text{ا}'}{\text{ب}'}+\frac{\text{ا}'\text{ب}'}{\text{س}'}\right)=0$$

پس قیمت ر مکرر آتی ہے اور اور قیمت یہہ ہے کہ

$$\text{ر}+\frac{\text{ب}'\text{س}'}{\text{ا}'}+\frac{\text{س}'\text{ا}'}{\text{ب}'}+\frac{\text{ا}'\text{ب}'}{\text{س}'}$$

تیرہوان باب معادلات درجہ چہارم

(۱۸۰) معادلات درجہ چہارم کی حل کرنی کی بعض ترکیبین ہم بیان کرتے ہین اوس دلیل کی موافق کہ دفعہ ۱۶۵ مین بیان ہوئی ہم مساوات درجہ چہارم کو بغیر دوسری رقم کی فرض کرتی ہین اول حل جسکا ہم بیان کرینگے ڈس کارٹیس کا حل کہلاتا ہے

(۱۸۱) مساوات لا^4 + ق لا^2 + ر لا + ص = ۰ کو حل کرو

فرض کرو لا^4 + ق لا^2 + ا لا + ص = (لا^2 + صہ لا + ف) (لا^2 − صہ لا + گہ)

اب ہم کو اس بات بتلانا چاہئی کہ مقادیر صہ ف گہ کو کس طرح دریافت کر سکتی ہین
بائین طرف جو اجزاء ضربی لکھی ہین اونکو باہم ضرب دو اور دونو ارکان کی امثال
لا کے یکسان قوتون کے اسمین برابر لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

گہ + ف − صہ^2 = ق اور صہ (گہ − ف) = ر اور گہ ف = ص

یعنی گہ + ف = ق + صہ^2 اور گہ − ف = ر/صہ اور گہ ف = ص

ان مساواتون مین سی اول اور دوم مساوات سی گہ اور ف کو صہ کی ارقام مین دریافت کرکے
تیسرے مساوات مین مندرج کرو تو

(ق + صہ^2 + ر/صہ) (ق + صہ^2 − ر/صہ) = ۴ ص

تحویل اور اختصار کرنی سی اس مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

صہ^6 + ۲ ق صہ^4 + (ق^2 − ۴ ص) صہ^2 − ر^2 = ۰

اس مساوات کو صہ^2 دریافت کرنی کی واسطی ہم مساوات مکعبی سمجہہ سکتی ہین اور ہم کو یقینی ایک حقیقی
مثبت قیمت بموجب دفعہ ۲۰ کی حاصل ہوگی پس جب صہ^2 ہم کو معلوم ہوگیا تو اوسی صہ معلوم ہوگا اور
پہر گہ اور ف معلوم ہو جائنگے پس جملہ لا^4 + ق لا^2 + ر لا + ص دو حقیقی اجزاء ضربی مین تحلیل ہو جائیگا اور
ہم کو مساوات درجہ چہارم کی چارون قیمتین ان درجہ دوم کی مساواتون کی حل کرنی سی حاصل ہو جائینگی

لا^2 + صہ لا + گہ = ۰ اور لا^2 − صہ لا + گہ = ۰

(۱۸۲) یہہ بات غور طلب ہی کہ ہم نی دو اجزاء ضربی جو درجہ دوم کی فرض کئی ہین اونمین سی ایک
مین رقم صہ لا فرض کی ہی اور دوسرے مین − صہ لا اور دلیل اسکی یہہ ہی کہ جس جملہ کی ہم
تحلیل اجزاء ضربی درجہ دوم مین کرنا چاہتی ہین اوسمین رقم لا^3 کی ملتف نہین ہی اب دوسری
مساوات درجہ دوم کی جو آخر مین دفعہ بالا کی لکہی ہی اوسکی دونو قیمتون کا مجموعہ صہ ہی اصلی مساوات

درجہ چہارم معروضہ کی [illegible]

سی دو دو کو $\frac{۴ \times ۳}{۱ \times ۲}$ طرح سی یعنی ۶ طرح سی منتخب کر سکتی ہین اور اسی دلیل سی مساوات صہ کی چھہ درجہ کی حاصل ہوتی ہی لیکن اس سبب سی کہ موافق دفعہ ۴۵ کے مساوات درجہ چہارم کی چارون قیمتون کا مجموعہ صفر ہی اسلئی مجموعہ دو قیمتون کا متحد المقدار اور مختلف العلامت باقی دو مقدارون کے مجموعہ کا ہوگا پس اسی دلیل اس بات کی معلوم ہوئی کہ مساوات صہ کی جفت قوا اسطرح ملتف ہوتی ہین کہ صہ^۲ کی قیمتین مکعبی مساوات کی حل کرنی سی دریافت ہوجاتی ہین جب صہ^۲ سہم کو دریافت ہوجاوے تو ہم کو اوسکی جذر نکالنی سی جو دو قیمتین مختلف العلامت دریافت ہونگی اونمین سی ہر ایک کو کام مین لاسکتی ہین اسواسطی کہ صہ کی مختلف علامتون کی کام مین لانی سی قیمتین ق اور گہ کی فقط آپسمین بدل جاوینگے اور اس تبدل سی اثر اون نتایج پر کچھہ نہین ہوگا جو مساوات درجہ چہارم کے حل کرنے مین کام آتے ہین

(۱۸۳) مثلاً فرض کرو کہ لا^۴ − ۱۰ لا^۲ − ۲۰ لا − ۱۶ = ۰ یہان ق = − ۱۰ اور ر = − ۲۰ اور ص = − ۱۶ مساوات مکعبی صہ^۲ کی یہہ حاصل ہوگی کہ صہ^۶ − ۲۰ صہ^۴ + ۱۶۴ صہ^۲ − ۴۰۰ = ۰ اور ایک قیمت اسکی صہ^۲ = ۴ ہی دفعہ ۱۱۹ دیکھو پس صہ = ۲ تو ق = ۲ اور گہ = − ۸ اسواسطے

لا^۴ − ۱۰ لا^۲ − ۲۰ لا − ۱۶ = (لا^۲ + ۲ لا + ۲) (لا^۲ − ۲ لا − ۸)

پس مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی یہہ چار قیمتین دریافت ہونگین

۴ و − ۲ و − ۱ + √−۱ اور − ۱ − √−۱

(۱۸۴) پس اوپر کی بیان سی ظاہر ہوتا ہی کہ مساوات درجہ چہارم کا حل موقوف ایک مساوات مکعبی کے استعانت پر موقوف ہی اسواسطی اس امر کا دریافت کرنا ایک بڑی بات ٹھہری کہ یہہ مکعبی مساوات کب صورت معدوم التحویل رکھتی ہی دفعہ ۱۷۱ دیکھو

اس سے موقع اس دعوی کی ثابت کرنی کا ہاتھہ لگتا ہی کہ اگر مساوات درجہ چہارم کی دو حقیقی قیمتین اور دو خیالی قیمتین ہون تو مساوات مکعبی مستعان کی کبھی صورت معدوم التحویل نہین واقع ہوگی

پس فرض کرو کہ مساوات درجہ چہارم کی خیالی قیمتیں سہ + صہ √-۱ اور سہ - صہ √-۱ تعبیر ہوں تو اس سبب سے کہ چاروں قیمتوں کا مجموعہ صفر ہی تو حقیقی قیمتیں - سہ + لر اور - سہ - لر کی ہونگیں ان قیمتوں سی ہر زوج کے مجموعہ سے یہہ جملے حاصل ہونگے کہ

± ۲ سہ و ± (لر ± صہ √-۱) اور ± (لر - صہ √-۱)

پس تین قیمتیں ھہ^۲ کی یہہ ہونگیں (۲ سہ)^۲ اور (لر + صہ √-۱)^۲ اور (لر - صہ √-۱)^۲ اگر لر صفر نہ ہو تو ھہ^۲ کے ان قیمتوں میں سی دو خیالی ہونگیں اور اگر لر صفر ہو تو ھہ^۲ کی تمام قیمتیں حقیقی ہونگیں لیکن دو قیمتیں منفی دو برابر ہیں اسلئی مکعبی مساوات ھہ^۲ کی صورت معدوم التحویل نہیں ہوگی

(۱۸۵) اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام حقیقی قیمتیں ہوں تو مساوات مکعبی مستعان کی قیمتیں بہی تمام حقیقی ہونگیں اور اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام خیالی قیمتیں ہوں تو وہ ان

سہ ± صہ √-۱ اور - سہ ± لر √-۱ کی ہونگیں ان قیمتوں میں سی ہر زوج کے مجموعہ سی یہہ جملی حاصل ہونگی کہ ± ۲ سہ و ± (صہ + لر) √-۱ اور ± (صہ - لر) √-۱

پس قیمتیں ھہ^۲ کی ۴ سہ^۲ اور - (صہ + لر)^۲ اور - (صہ - لر)^۲ ہیں اسلئی سب حقیقی قیمتیں ہیں اسی معلوم ہوا کہ اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام حقیقی قیمتیں ہوں یا خیالی قیمتیں ہوں تو مکعبی مساوات مستعان اکثر معدوم التحویل ہوگی ہم نی جو یہہ لکہا ہی کہ مساوات اکثر معدوم التحویل ہوگی تو اسکا سبب یہہ ہی کہ ممکن ہے کہ مساوات مکعبی کی دو قیمتیں برابر ہوں تو پہر اوس وقت وہ معدوم التحویل نہیں ہوگی

(۱۸۶) ہم نی اوپر کی دو دفعوں میں یہہ بتلایا ہی کہ مساوات مکعبی مستعان کی قیمتوں کے صورتیں موافق مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی قیمتوں کے کیا ہونگیں اب ہم اوسکی بالعکس لکہتی ہیں کہ مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی قیمتوں کی صورتیں موافق مساوات مکعبی مستعان کے قیمتوں کے کیا ہونگیں چونکہ مساوات مکعبی کی آخر رقم منفی ہی اسلئی ایک قیمت مثبت ہوگی اور چونکہ بموجب دفعہ ۱۸۵ کے حاصل ضرب قیمتوں کا مثبت ہی تو یہہ صورتیں واقع ہونگیں (۱) تمام قیمتیں مثبت ہوں (۲) ایک مثبت

ہو اور دو منفی ہون (۳) ایک مثبت قیمت اور دو خیالی قیمتین تو بموجب دفعات ۱۸۴ اور ۱۸۵ کے نتایج مفصلہ ذیل حاصل ہونگے

(۱) اگر مساوات مکعبی کی تمام قیمتین مثبت ہون تو مساوات درجہ دوم کی تمام قیمتین حقیقی ہونگین

(۲) اگر مساوات مکعبی کی ایک مثبت قیمت ہو اور دو منفی قیمتین تو مساوات درجہ چہارم کے دو قیمتین حقیقی اور دو قیمتین خیالی ہونگین یا چارون قیمتین خیالی ہونگین

(۳) اگر مکعبی مساوات کی ایک مثبت قیمت ہو اور دو خیالی قیمتین تو مساوات درجہ چہارم کی دو حقیقی قیمتین اور دو خیالی قیمتین ہونگین

(۱۸۷) مساوات درجہ چہارم کی چارون قیمتین بہت سادگی کی ساتھ مکعبی مساوات مستعانہ کی قیمتون مین بیان ہوسکتی ہین

فرض کرو کہ ھ کی وہ تین قیمتین س^۲ اور ص^۲ اور ل^۲ سی تعبیر ہون جو اس مساوات سی حاصل ہوتی ہین کہ

ھ^۳ + ۲ق ھ^۲ + (ق^۲ − ۴ص) ھ − ر^۲ = ۰

تو بموجب دفعہ ۴۵ کے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ ر^۲ = س^۲ ص^۲ ل^۲ اور

− ۲ق = س^۲ + ص^۲ + ل^۲ پس ر = س ص ل رکھین اور صہ کی قیمت سہ لین تو

لا^۲ + صہ لا + ف = لا^۲ + سہ لا + ۱/۲ (ق + سہ^۲ − ر/سہ)

= لا^۲ + سہ لا + ۱/۴ (سہ^۲ − صہ^۲ − ل^۲ − ۲ صہ ل)

اسیواسطے مساوات لا^۲ + صہ لا + ف = ۰ کے حل کرنی سی ہم کو یہہ حاصل ہو گا کہ

لا = ۱/۲ (− سہ − صہ − ل) یا ولا = ۱/۲ (− سہ + صہ + ل)

اور اسیطرح مساوات لا^۲ − صہ + ف = ۰ کے حل کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

لا = ۱/۲ (سہ − صہ + ل) یا لا = ۱/۲ (سہ + صہ − ل)

پس مساوات درجہ چہارم کی یہہ چار قیمتین حاصل ہونگین کہ

۱/۲ (− سہ − صہ − ل) و ۱/۲ (− سہ + صہ + ل) و ۱/۲ (سہ − صہ + ل) و ۱/۲ (سہ + صہ − ل)

(۱۸۸) ایک اور ترکیب مساوات درجہ چہارم کی حل کرنی کی مختلف مہندسین نے لکھی ہی او نمین کچھہ تھوڑاہی فرق ہے

اور اس ترکیب کا نام کبھی تو فرری کی ترکیب کبھی وارنگ کی ترکیب اور کبھی سمپسن کی ترکیب کہا جاتا ہے اب ہم اوسکو بیان کرتے ہین

فرض کرو مساوات درجہ چہارم کی یہہ ہو کہ

$$لا^{۴} + ع لا^{۳} + ق لا^{۲} + ر لا + ص = ۰$$

طرفین پر ا لا^۲ + ب لا + س زیادہ کرو اور ا اور ب اور س کو ایسا معین کرو کہ ہر طرف مساوات کی مربع کامل بنجای تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$لا^{۴} + ع لا^{۳} + (ق + ا) لا^{۲} + (ر + ب) لا + ص + س = ا لا^{۲} + ب لا + س$$

بائین طرف کا رکن مساوات مجذور کامل ہوگا اگر $ب^{۲} = ۴ ا س$ کے ہو دائین طرف کی رکن کو فرض کرو کہ وہ برابر

$$\left(لا^{۲} + \frac{ع لا}{۲} + م\right)^{۲}$$

کے ہو تو امثال کے مقابلہ کرنے سے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$۲ م + \frac{ع^{۲}}{۴} = ق + ا \quad اور \quad ع م = ر + ب \quad اور \quad م^{۲} = ص + س$$

یہہ تین ارتباط ا اور ب اور س کو ارقام م مین بیان کرتی ہین ا اور ب اور س کی قیمتوں کو مساوات $ب^{۲} = ۴ ا س$ مین مندرج کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(ع م - ر)^{۲} = ۴ \left(۲ م + \frac{ع^{۲}}{۴} - ق\right)(م^{۲} - ص)$$

اس مکعبی مساوات سی م دریافت ہوگا اور پہر اوسسے ا اور ب اور س معلوم ہونگی اور چونکہ یہہ ہم کو حاصل ہی کہ

$$\left(لا^{۲} + \frac{ع لا}{۲} + م\right)^{۲} = ا لا^{۲} + ب لا + س = ا لا^{۲} + ب لا + \frac{ب^{۲}}{۴ ا}$$

اسی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ $لا^{۲} + \frac{ع لا}{۲} + م = \pm \frac{۲ ا لا + ب}{۲ \sqrt{ا}}$

پس ہم کو دو مساواتین درجہ دوم کی حل کرنی پڑینگے یعنی

$$لا^{۲} + \frac{ع لا}{۲} + م + \frac{۲ ا لا + ب}{۲ \sqrt{ا}} = ۰ \quad اور \quad لا^{۲} + \frac{ع لا}{۲} + م - \frac{۲ ا لا + ب}{۲ \sqrt{ا}} = ۰$$

(۱۸۹) یہان یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ اس ترکیب مین جس مکعبی مساوات متعاون کی حل کرنی کا

کام ہم کو پڑتا ہی وہ اگر معدوم التحویل ہو گی بشرطیکہ مساوات درجہ چہارم کی دو حقیقی قیمتیں اور دو خیالی قیمتیں نہ ہوں **دلیل** فرض کرو کہ مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی چار قیمتوں کو سہ وصہ ولر وفر تعبیر کرتی ہیں تو دفعہ ۱۸۸ میں دو مساواتیں درجہ دوم کی حاصل ہوئیں ہیں اون پر خیال کرنی سی یہہ نتیجہ پیدا ہوتا ہی کہ م + ب/۲ا برابر چاروں مقادیر سہ وصہ ولر وفر میں سی دو کی حاصل ضرب کے ہوا اور م − ب/۲ا باقی دو کے حاصل ضرب کے ہو پس فرض کرو کہ

م + ب/۲ا = سہ صہ اور م − ب/۲ا = لر فر

پس م = ½ (سہ صہ + لر فر)

پس یہاں قرینہ سی یہہ نتیجہ مستنبط کرتی ہیں کہ م کی دو اور قیمتیں ½ (سہ لر + صہ فر) اور ½ (سہ فر + صہ لر) ہونگیں

یہہ ظاہر ہی کہ اگر سہ وصہ ولر وفر تمام حقیقی قیمتیں ہوں تو م کی یہہ تینوں قیمتیں حقیقی ہونگیں اور اگر تمام سہ وصہ ولر وفر تمام خیالی ہوں تو بھی تینوں قیمتیں حقیقی ہونگیں لیکن اگر چاروں قیمتوں میں سی دو خیالی اور دو حقیقی قیمتیں ہوں تو یہہ نتیجہ نکلی گا کہ م کی دو قیمتیں خیالی ہیں اور ایک حقیقی یا اونکی تمام حقیقی قیمتیں ہیں اور دو اونمیں سی برابر ہیں

(۱۹۰) اب ہم یولر کی ترکیب مساوات درجہ چہارم کی حل کرنی کی لکھتی ہیں فرض کرو کہ مساوات یہہ ہی

لا^{4} + ق لا^{2} + ر لا + ص = ۰

فرض کرو کہ لا = ز + ی + صہ پس

لا^{2} = ز^{2} + ی^{2} + صہ^{2} + ۲ (زی + ی صہ + صہ ز)

یعنی لا^{2} − ز^{2} − ی^{2} − صہ^{2} = ۲ (زی + ی صہ + صہ ز)

طرفین کا مجذور کرو تو

لا^{4} − ۲ لا^{2} (ز^{2} + ی^{2} + صہ^{2}) + (ز^{2} + ی^{2} + صہ^{2})^{2} = ۴ (زی + ی صہ + صہ ز)^{2}

= ۴ (ز^{2}ی^{2} + ی^{2}صہ^{2} + صہ^{2}ز^{2}) + ۸ زی صہ (ز + ی + صہ)

د + ی + ھ کی جگہ لا کو رکھو اور منتقل کرو تو

$$\text{لا}^4 - 2\,\text{لا}^2(\text{د}^2+\text{ی}^2+\text{ھ}^2) - 8\,\text{لا}\,\text{د}\,\text{ی}\,\text{ھ} + (\text{د}^2+\text{ی}^2+\text{ھ}^2)^2 - 4(\text{د}^2\text{ی}^2+\text{ی}^2\text{ھ}^2+\text{ھ}^2\text{د}^2) = 0$$

تا کہ اس مساوات کی مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی ساتھہ تطبیق ہو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ق} = -2(\text{د}^2+\text{ی}^2+\text{ھ}^2) \quad \text{اور} \quad \text{ر} = -8\,\text{د}\,\text{ی}\,\text{ھ}$$

$$\text{ص} = (\text{د}^2+\text{ی}^2+\text{ھ}^2)^2 - 4(\text{د}^2\text{ی}^2+\text{ی}^2\text{ھ}^2+\text{ھ}^2\text{د}^2)$$

پس $\text{د}^2+\text{ی}^2+\text{ھ}^2 = -\frac{\text{ق}}{2}$

$$\text{د}^2\text{ی}^2+\text{ی}^2\text{ھ}^2+\text{ھ}^2\text{د}^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\text{ق}^2}{4} - \text{ص}\right) = \frac{\text{ق}^2 - 4\,\text{ص}}{16}$$

$$\text{د}^2\text{ی}^2\text{ھ}^2 = \frac{\text{ر}^2}{64}$$

اسواسطے موافق دفعہ ۴۵ کی د^2 + ی^2 اور ھ^2 قیمتیں ط کی ہیں جو اس مکعبی مساوات سے حاصل ہوتے ہیں کہ

$$\text{ط}^3 + \frac{\text{ق}}{2}\text{ط}^2 + \frac{\text{ق}^2 - 4\,\text{ص}}{16}\text{ط} - \frac{\text{ر}^2}{64} = 0$$

فرض کرو کہ اس مساوات کی قیمتیں ط_1 اور ط_2 اور ط_3 سی تعبیر ہوتی ہیں تو

$$\text{د} = \pm\sqrt{\text{ط}_1} \quad \text{اور} \quad \text{ی} = \pm\sqrt{\text{ط}_2} \quad \text{اور} \quad \text{ھ} = \pm\sqrt{\text{ط}_3}$$

اگر ان قیمتوں کو جملہ لا یعنی د + ی + ھ میں مندرج کریں تو آٹھہ مختلف نتیجے بسبب اشتباہ علامت کے پیدا ہونگی لیکن یہہ سب نتائج داخل ہونے کی قابل نہیں ہیں اسواسطے کہ ہم کو یہہ بھی حاصل ہوچکا ہے کہ $\text{د}\,\text{ی}\,\text{ھ} = -\frac{\text{ر}}{8}$ پس د اور ی اور ھ کی حاصل ضرب کے علامت متضاد علامت ر کی ہو

اگر ہم فرض کریں کہ ر مثبت تو لا کی وہ قیمتیں جو مساوات میں داخل ہونے کی قابلیت رکھتی ہیں ہونگی سو

$$-\sqrt{\text{ط}_1} - \sqrt{\text{ط}_2} - \sqrt{\text{ط}_3} \;\text{اور}\; -\sqrt{\text{ط}_1} + \sqrt{\text{ط}_2} + \sqrt{\text{ط}_3} \;\text{و}\; \sqrt{\text{ط}_1} - \sqrt{\text{ط}_2} + \sqrt{\text{ط}_3} \;\text{و}\; \sqrt{\text{ط}_1} + \sqrt{\text{ط}_2} - \sqrt{\text{ط}_3}$$

اگر ہم ر کو منفی فرض کریں تو لا کی یہہ قیمتیں مساوات میں داخل ہونے کی قابلیت رکھنے والی حاصل ہونگی

$$\sqrt{\text{ط}_1} + \sqrt{\text{ط}_2} + \sqrt{\text{ط}_3} \;\text{و}\; \sqrt{\text{ط}_1} - \sqrt{\text{ط}_2} - \sqrt{\text{ط}_3} \;\text{و}\; -\sqrt{\text{ط}_1} + \sqrt{\text{ط}_2} - \sqrt{\text{ط}_3} \;\text{و}\; -\sqrt{\text{ط}_1} - \sqrt{\text{ط}_2} + \sqrt{\text{ط}_3}$$

(۱۵۱) دلیل اس بات کی کہ کیونکر آٹھہ قیمتیں لا کی دفعہ گذشتہ میں پیدا ہوتی ہیں یہہ ہی کہ ارتباط

کی $\text{ص} = -\frac{\text{ر}}{8}$ کا مجذور کیا گیا تہا اور وہ عمل مین اس صورت کی $\text{ص}^2 = \frac{\text{ر}^2}{64}$ مین کام آیا تہا پس اس سبب سے کہ ارتباط دوسرے صورت مین علامت ر کی تبدل سی نہین بدلتا تو عمل مین فی الحقیقت قیمتین مساوات درجہ چہارم $\text{لا}^4 + \text{ق}\,\text{لا}^2 - \text{ر}\,\text{لا} + \text{ص} = 0$ اور نیز مساوات درجہ چہارم $\text{لا}^4 + \text{ق}\,\text{لا}^2 + \text{ر}\,\text{لا} + \text{ص} = 0$ کی کام مین آتی ہین یعنی چار کی آٹہہ قیمتین ہو جاتی ہین دفعہ ۱۸۱ کی مکعبی مساوات مستعان دفعہ ۱۹۰ کی مکعبی مساوات سی تطبیق ہو جائیگی اگر $\text{ص}^2 = 4\text{ط}$ کے فرض کرین پس دفعات ۱۸۴ - ۱۸۶ تک مین جو مساوات مکعبی مستعان اور مساوات مفروضہ درجہ چہارم کے قیمتون کے ارتباط اور وہ صورتین جو مساوات کو معدوم التحویل بناتی ہین لکہی ہین وہ جیسی کہ ڈس کارٹیس کی ترکیب سے متعلق ہین ایسی ہی یولر کی ترکیب سی بہی متعلق ہین

(۱۹۲) حل خاص صورت کی مساوات درجہ چہارم کا بہ نسبت عام صورت مساوات درجہ چہارم کے بہت آسان ہوتا ہے مثلاً یہہ مساوات درجہ چہارم

$$\text{لا}^4 + \text{ع}\,\text{لا}^3 + \text{ق}\,\text{لا}^2 + \text{ر}\,\text{لا} + \text{ص} = 0$$

مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہو سکتی ہی اگر $\text{ع}^3 - 4\text{ع}\,\text{ق} + 8\text{ر} = 0$ کے اسواسطی کہ مساوات $\text{لا}^4 + \text{ع}\,\text{لا}^3 + \text{ق}\,\text{لا}^2 + \text{ر}\,\text{لا} + \text{ص} = 0$ کو اسطرح لکہہ سکتی ہین کہ

$$\text{لا}^2\left(\text{لا} + \frac{\text{ع}}{2}\right)^2 + \left(\text{ق} - \frac{\text{ع}^2}{4}\right)\text{لا}\left(\text{لا} + \frac{\text{ر}}{\text{ق} - \frac{\text{ع}^2}{4}}\right) + \text{ص} = 0$$

اور یہہ مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہو سکتی ہی اگر $\frac{\text{ر}}{\text{ق} - \frac{\text{ع}^2}{4}} = \frac{\text{ع}}{2}$ کے ہو یعنی اگر $\text{ع}^3 - 4\text{ع}\,\text{ق} + 8\text{ر} = 0$

چودہوان باب سٹرم صاحب کا ضابطہ

(۱۹۳) ابواب گذشتہ مین ہم نی معادلات کی قیمتون کی مسائل اور تیسری اور چوتہی درجہ کی مساواتون کی حل کرنی کی ترکیبین لکہین ہین مگر اب ہم ایک اور ہی مضمون لکہتی ہین یعنی معادلات کی عددی تقریبی قیمتین کن ترکیبون اور حکمتون سی دریافت ہوتی ہین آغاز اس مضمون کا سٹرم صاحب کی ضابطہ سی ہوتا ہی اول اس ضابطہ کو ثابت کرتے ہین اوسکا مطلب یہہ ہے

کو ایک مساوات کی قیمتوں کا مقام اور تعداد حقیقی قیمتوں کی تشخیص ہو جا

دفعہ آئندہ میں اس ضابطہ کو ثابت کیا ہے اور پہلے اوسکی تفتیش اس ضابطہ کی لکھی ہیں اور بعد ازاں اوسکے موافق مثالوں کو حل کیا ہے

(۱۹۷) **سٹرم صاحب کا ضابطہ**۔ فرض کرو کہ $ح(لا) = 0$ مساوات ہو جسمیں مساوی قیمتیں خارج ہو گئی ہیں اور $ح_1(لا)$ کا اول حاصل مشتق $ح(لا)$ ہو اور پہر $ح(لا)$ اور $ح_1(لا)$ پر عمل وفق اعظم دریافت کرنی کا کیا گیا ہو مگر اوسمیں یہہ ترمیم اور کی گئی ہو کہ جو باقی تقسیم کی اندر پیدا ہوا اوسکی علامتیں بدل دی گئیں ہوں اور پہر وہ باقی مقسوم علیہ بنائی گئی ہو اور یہہ عمل جب تک جاری رہا ہو کہ ایک باقی ایسی حاصل ہو کہ اوسکو کچھ لگاؤ لا سی نہ ہو اور اس باقی کی بھی علامتیں بدلی گئی ہوں

فرض کرو کہ اسطرح جو باقیات ترمیم شدہ حاصل ہوں وہ اس سلسلہ $ح_2(لا)$ و $ح_3(لا)$ ... $ح_م(لا)$ سی تعبیر ہوں۔ فرض کرو کہ سہ کوئی مقدار ہو اور صہ ایک اور مقدار ہو جو از روی جبر و مقابلہ بڑی سہ سی ہے تو مساوات $ح(لا) = 0$ کی حقیقی قیمتوں کی تعداد درمیان سہ اور صہ کی برابر اوس زیادتی کی ہوگی جو سلسلہ $ح(لا)$ اور $ح_1(لا)$ اور $ح_2(لا)$ ... $ح_م(لا)$ کی تغیرات علامتوں کی تعداد کو اوس حالت میں کہ لا = سہ کی ہو اوس تعداد تغیرات علامت پر اس سلسلہ کی حاصل ہے کہ جب لا = صہ کے ہو

تمام سلسلہ $ح(لا)$ و $ح_1(لا)$ و $ح_2(لا)$ ... $ح_م(لا)$ کو سٹرم کے جملے کہتے ہیں اور سلسلہ $ح_1(لا)$ و $ح_2(لا)$ ... $ح_م(لا)$ کو مستعان جملے کہتے ہیں مستعان جملے وہی ہیں جو سٹرم کے جملے ہیں مگر اونمیں سی $ح(لا)$ خارج ہے

فرض کرو کہ $ق_1$ و $ق_2$ ... $ق_{م-1}$ متواتر خارج قسمتوں کو جو عمل مذکور سی پیدا ہوتی ہیں تعبیر کرتے ہیں تو یہہ ارتباطات حاصل ہونگے

$$ح(لا) = ق_1 ح_1(لا) - ح_2(لا)$$

$$ح_1(لا) = ق_2 ح_2(لا) - ح_3(لا)$$

$$ح_2(لا) = ق_3 ح_3(لا) - ح_4(لا)$$

$$ح_{م-2}(لا) = ق_{م-1} ح_{م-1}(لا) - ح_م(لا)$$

اب ان ارتباطات سی تین نتیجی استخراج کرتے ہین

اول اخر جملہ حم (لا) صفر نہین ہی اسواسطی کہ بموجب فرض کے اوسکو کچھہ تعلق لا سی نہین ہے اگر وہ صفر ہو تو ح (لا) اور ح۱ (لا) کا چاہیی کوئی وفق مشترک ہو اور بموجب دفعہ ۵۵ کے مساوات ح (لا) = ۰ کی برابر قیمتین ہونی چاہیی اور یہہ خلاف فرض کے ہے

دوم دو متصل کی جملی مستعان ایک ہی وقت مین معدوم نہین ہوسکتی اسواسطے کہ وہ معدوم ہون تو پہر اونکی اگی کی جملی بہی معدوم ہون یہانتک کہ حم (لا) بہی داخل ہوا اور یہہ بموجب اول نتیجہ کی ناممکن ہے

سوم جب ایک جملہ معدوم ہوتا ہی تو اوسکی متصل کی طرفین جملون کی علامتین متضاد ہوتی ہین مثلاً فرض کرو ح۲ (لا) = ۰ تو نظم ارتباطات کی تیسری ارتباط سی ح۱ (لا) = − ح۳ (لا) حاصل ہوگا

اب کوئی سٹرم کی جملون مین کسی جملہ کی اندر علامت کا تبدل نہین ہوسکتا الا اوس صورت مین کہ لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ اوس جملی کو معدوم کردی اور اب ہم یہہ ثابت کرینگی کہ جب لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچتی ہی کہ وہ ح (لا) کو معدوم کردی تو سٹرم کی جملون مین ایک تغیر علامت کم ہوجاتا ہے اور اس سبب سی کہ لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ کسی ایک جملہ مستعان کو معدوم کردیتی کوئی تغیر علامت نہ کم ہوتا ہے نہ پیدا ہوتا ہے

اول فرض کرو کہ س ایک قیمت مساوات ح (لا) = ۰ کی ایسی ہو کہ ح (س) = ۰

فرض کرو کہ صہ ایک مثبت مقدار ہو اب بموجب دفعہ ۰ اکی ح (س − صہ) قوا صہ مین پہیل سکتا ہے اور بموجب دفعہ ۱۴ کی صہ ایسا چہوٹا مقرر ہوسکتا ہی کہ تمام سلسلہ کی وہی علامت ہو جو اول رقم کی علامت ہو جو معدوم نہین ہوتی یعنی علامت ح (س − صہ) کی وہی ہو جو علامت − صہ ح۱ (س) کی ہے کیونکہ ح (س) = ۰ اور علامت ح۱ (س − صہ) کی وہی ہوگی جو علامت ح۱ (س) کی ہے بشرطیکہ صہ کو کافی چہوٹا فرض کرین پس اگر لا = س − صہ کی ہو اور صہ کافی چہوٹا فرض کیا جاوے تو ح (لا) اور ح۱ (لا) کی مختلف علامتین ہونگین

اسیطرح سی ثابت ہوسکتا ہی کہ اگر لا = س + صہ کی اور صہ کافی چہوٹا فرض کیا جاسکے

تو ح (لا) اور ح۱ (لا) کی ایک ہی علامت ہوگی

پس جب لا بڑھ کر مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت پر اپنی نوبت پہونچائی تو سٹرم کی جملون مین سے ایک تغیر علامت گم ہوجاتا ہے

دوم فرض کرو کہ س ایسی قیمت لا کی ہی کہ مستعان جملون مین سے ایک کو معدوم کرتا ہی مثلاً ح ر (لا) کو تو ح ر (س) = ۰ تو ح ر-۱ (س) اور ح ر+۱ (س) کی مختلف علامتین ہونگین اور ماقبل لا = س کی اور مابعد لا = س کی تین قیمتین ح ر-۱ (لا) اور ح ر (لا) و ح ر+۱ (لا) ایک مستقل علامت ہمیشہ رکھینگی اور اونمین ایک تغیر علامت ہوگا اسواسطے کہ اگر ح ر-۱ (لا) اور ح ر (لا) کی ایک ہی علامت ہو تو ح ر (لا) اور ح ر+۱ (لا) کی مختلف علامتین ہونگین اور بالعکس اسکی پس ثابت ہوا کہ اگر لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ کسی ایک جملہ مستعان کو معدوم کردی تو اوسی سٹرم کی جملون مین نہ کوئی تغیر علامت گم ہوتا ہے نہ پیدا ہوتا ہے

کوئی قیمت لا کی دو متصل کی جملون کو معدوم ایک ہی وقت مین نہین کرسکتی اگر دو یا زیادہ جملی جو متصل نہ ہون معدوم ہوجائین تو اگر ح (لا) اونمین سی ایک ہوگا تو موافق نتیجہ اول کے یہہ مستنبط ہوگا کہ ایک تغیر علامت گم ہوگا جب کہ لا کی زیادہ ہوکر اوس قیمت پر نوبت پہونچیگی اور اگر ح (لا) اونمین سی نہ ہو تو بموجب نتیجہ دوم کی یہہ اخذ ہوگا کہ کوئی تغیر علامت گم نہین ہوئی

پس ہم نی ثابت کردیا کہ جب لا زیادہ ہوتا ہی تو سٹرم کی جملون مین کبھی ایک تغیر علامت گم نہین ہوتا الا اوس صورت مین کہ لا کی نوبت مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت پر پہونچی اور کبھی تغیر علامت پیدا نہین ہوتا

پس اسی معلوم ہوا کہ تعداد تغیرات علامت کی جو اسطرح گم ہوتی ہی کہ لا زیادہ ایک قیمت سہ سے ہوکر بڑی قیمت صہ پر اپنی نوبت پہونچائی وہ برابر ہوتی ہی مساوات ح (لا) = ۰ کی اون قیمتون کے تعداد کے جو درمیان سہ اور صہ کے واقع ہون

(۱۹۵) ہم نی ثابت کردیا ہی کہ سٹرم کی جملون مین تغیرات علامت کی اندر کوئی تبدل اس سبب سی نہین واقع ہوسکتا کہ لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ کسی ایک جملہ مستعان کو

معدوم کر دی مگر اکثر علامات + اور − کی ترتیب میں جملون کے سلسلہ کی اندر ہو
تبدل واقع ہوتی ہین مثلاً فرض کرو کہ ا اور ب دو قیمتین مساوات ح (لا) = ۰ کی ہو اور ا بہ نسبت ب کی کم ہو تو
ح (لا) اور ح، لا کی مختلف علامتین ماقبل لا = ا کی ہونگین اور ایک ہی علامتین ما بعد
لا = ا کے ہونگین اب ماقبل لا = ب کی علامتین ح (لا) اور ح، (لا) کے پہر مختلف
ہونگین فی الحقیقت مساوات ح، (لا) = ۰ کی ایک قیمت درمیان لا = ا اور لا = ب
کے ہوتی ہی پس ح، (لا) کی نوبت مثبت سی منفی پر پہونچنی چاہیی یا بالعکس اسکے درمیان لا = ا اور
لا = ب کی پس ح، (لا) کا مثبت سی منفی کی طرف جاتا یا بالعکس اسکی درمیان لا = ا
اور لا = ب کی ہونا کل تعداد تغیرات علامت سٹرم کی جملون کی سلسلہ کی کل تعداد
تغیرات علامت مین کچہ تبدل نہین کر سکتا یہہ ہم نے ثابت کر دیا مگر سلسلہ مین جو تقسیم علامت
+ اور − کی ہی اوسمین وہ تبدل پیدا کرتا ہی اور اسی یہہ بات ممکن ہی کہ جب لا زیادہ
ہوکر ا پر اپنی نوبت پہونچانی سی ایک تغیر علامت کو گم کر ہی تو اسکی بعد ایک اور تغیر علامت گم ہوگا
جب لا کی نوبت زیادہ ہوکر ب پر پہونچی

اس دفعہ سی کچہ سٹرم صاحب کی اثبات ضابطہ مین کوئی امر زیادہ نہین ہوتا فقط اوسی طالب علمون کے امداد اس بات
مین ہوتی ہی کہ کس طرح تغیرات علامت گم ہوتے ہین

(۱۹۶) سٹرم کی جملون کی سلسلہ مین تغیرات علامت کی تعداد گنتی مین یہہ ہوسکتا ہی کہ قیمت لا کی
جسپر ہم بحث کر رہی ہین ان جملون مین سی کسی کو فنا کر دی تو اس بات کا لحاظ کرنا چاہیی کہ ہم کو ہما
علامتین ایا مثبت کی یا منفی کی جملہ معدوم سی منسوب کرین کیونکہ علامتین اوسکی ماقبل اور مابعد جملون کے ضرور
مخالف ہوتے ہین

(۱۹۷) مساوات ح (لا) = ۰ کی تمام حقیقی قیمتون کی تعداد دریافت کرنی کی لئی لا کی جگہ − ∞
اور پہر + ∞ سٹرم کی جملون مین رکہو پس اول صورت مین جتنی تعداد تغیرات علامت کی ہوگی
اوسکو جسقدر از دیاد دوسری صورت کی تغیرات علامت کی تعداد پر حاصل ہوگا اوسیقدر تعداد

مساوات کی کل حقیقی قیمتوں کی ہوگی جب لا برابر + ∞ یا - ∞ کی کیا جائے تو جملوں میں سی
ہر ایک جملہ کی وہی علامت ہوگی جو لا کی اعلی قوت کی علامت اوس جملہ میں ہو

(۱۹۸) فرض کرو کہ ح (لا) کی درجی کو ن تعبیر کریں تو تعداد مستعان جملوں ح۱ (لا) و ح۲ (لا) ۔۔
اکثر ن ہوگی کیونکہ ہر باقی اکثر ایک درجہ کم بہ نسبت باقی ماقبل کی ہوگی پس یہہ ہم فرض کرینگے
کہ جو ح (لا) کا درجہ ہی وہی تعداد مستعان جملوں کی ہی اور ح (لا) میں جو اعلی قوت لا کی ہے
اوسکی امثال مثبت ہیں **اول** اگر کل مستعان جملوں کی اول رقموں کی مثبت امثال ہوں تو مساوات ح (لا) = ۰
کی تمام قیمتیں حقیقی ہونگیں اسواسطے کہ سٹرم کی جملی مثبت ہونگی جب لا = + ∞ کے ہو
اور وہ علی التبادل مثبت اور منفی ہونگین جب لا = - ∞ پس ن تغیرات علامت
گم ہوئینگے جب لا کی نوبت - ∞ سی + ∞ تک پہونچی

دوم اگر اول رقموں کی سب جملوں میں امثال مثبت نہ ہوں تو خیالی قیمتوں کے زوج اوتنی ہی ہونگے
جتنی کہ تغیرات علامت واقع ہونگی ہر تغیر کی واسطے ایک زوج ہوگا

فرض کرو کہ ان امثال کی سلسلہ میں م تغیرات علامت اور ن - م تواترات علامت ہیں
پس جب لا = + ∞ تو م تغیرات علامت اور ن - م تواترات علامات سٹرم کی جملوں میں ہیں
اب لا کو + ∞ سی - ∞ میں بدل دو تو تغیرات علامت کی جگہہ تواترات علامت ہوجائینگی اور
تواترات علامت کی جگہہ تغیرات علامت ہوجائینگی پس جب لا = - ∞ تو ن - م تغیرات علامت ہونگے
اسیواسطے تغیرات علامت کی تعداد جب لا = - ∞ کی اور تغیرات علامت کی تعداد سی کہ لا = + ∞ کے
بقدر ن - ۲م کے زیادہ ہوگی اور ن - ۲م حقیقی قیمتیں مساوات ح (لا) = ۰ کی ہونگین
اور اسیواسطے ۲م خیالی قیمتوں کی تعداد ہوگی

اسی معلوم ہوا کہ ایک مساوات کی تمام قیمتوں کی حقیقی ہونی کی لئی یہہ ضرور ہی کہ کل مستعان
جملوں کی اول رقموں کی امثال ایک ہی علامت رکھیں

(۱۹۹) فرض کرو کہ مستعان جملوں کی اندر ہم کو یہہ دریافت ہوا کہ ح ر (لا) کی علامت نہیں بدل سکتی

پس جتنی جملی اوسکی آگی نکلی اون پر کچھہ لحاظ نہ کرو اور سلسلہ ح (لا) وح۱ (لا) وح۲ (لا) ۰۰ ح ر (لا) کے اندر تعداد تغیرات علامت کی شمار کرلو کیونکہ مسٹر سٹرم صاحب کی ضابطہ کے اثبات مین اخر جملہ مستعان کی لابدی خاصیت یہہ ہونی چاہی کہ وہ معدوم نہ ہوتا ہوا ور چونکہ ح ر (لا) معدوم نہین ہوتا تو ح (لا) وح۱ (لا) وح۲ (لا) ۰۰ ح ر (لا) پر اثبات ضابطہ کا عاید ہوگا یہہ بات عمل مین بڑی کام آتی ہی کیونکہ حساب دانین اعلی درجہ کی ہون تو وہان تمام سٹرم کی جملوں کا سلسلہ دریافت کرنا بڑی محنت کا کام ہوتا ہی اسواسطے ایسی قاعدہ کا بتانا کہ جسسی یہہ مشقت شاقہ تمام سلسلہ کی بنانی کی چھوٹ جای نہایت ضروری ہے

(۲۰۰) فرض کرو کہ مح (لا) ایک جملہ ایسا ہی کہ اوسمین اور ح (لا) مین کوئی جزضربی مشترک نہین ہے اور فرض کرو کہ مح (لا) اور ح۱ (لا) مین جب کوئی قیمت ح (لا) = ۰ کے بجای لا کی مندرج کیجاے تو اونکی ایک ہی علامت ہوتی ہی تو ہم مح (لا) کو بجای ح۱ (لا) کے کام مین لاسکتی ہین اور باقی مستعان جملے ح (لا) اور مح (لا) سی بجای ح (لا) اور ح۱ (لا) کے مستنبط کر سکتی ہین اسواسطی کہ اگر مسٹر سٹرم صاحب کی ضابطہ کی اثبات کو دوبارہ کام مین لائین تو یہہ معلوم ہوگا کہ ضابطہ کی دو اصلی خاصیتین ان جملون کی نئی سلک مین بہی موجود ہین ایکیہہ کسی جملہ مستعان کی معدوم ہونے سے کوئی تغیر علامت گم نہین ہوتا دوم یہہ کہ ح (لا) کے معدوم ہونی سی ایک تغیر علامت گم ہوتا ہے

(۲۰۱) ابتک ہم نی مسٹر سٹرم صاحب کی ترکیب کے اندر مساوات کو برابر قیمتوں سی صاف کرکی لکہا ہے لیکن اب یہہ ثابت کرتی ہین کہ اس قید کے کچھہ ضرورت نہین اور اس ضابطہ سی ہمیشہ تعداد جدا جدا قیمتوں کی حدود معینہ کی اندر معلوم ہوجائیگی اور قیمتوں کے مکررانی پر کچھہ لحاظ نہین کیا جائیگا مثلاً فرض کرو کہ ا قیمت ع دفعہ اور ب قیمت ق دفعہ مساوات ح (لا) = ۰ مین واقع ہوتی ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = (لا − ا)^ع (لا − ب)^ق (لا − س) (لا − د) ۰۰۰

پس ح۱ (لا) = (لا − ا)^(ع−۱) (لا − ب)^(ق−۱) [ع (لا − ب) (لا − س) (لا − د) ۰۰۰

+ ق (لا − ا) (لا − س) (لا − د) ۰۰۰

+ ۰۰۰ {

پس $(لا - ا)^{ع-۱}$ اور $(لا - ب)^{ق-۱}$ وفق اعظم ح (لا) اور ح۱ (لا) کا ہوگا
اور یہہ جملہ تمام مستعان جملوں ح۲ (لا) و ح۳ (لا) ۔۔ ح۱ (لا) کو جو دفعہ ۱۹۴ مین
لکھی ہین تقسیم کریگا
اب فرض کرو کہ صح (لا) = (لا − ا) (لا − ب) (لا − س) (لا − د) ۔ ۔ ۔

مح (لا) = ع (لا − ب) (لا − س) (لا − د) ۔

+ ق (لا − ا) (لا − س) (لا − د) ۔ ۔ ۔

+ (لا − ا) (لا − ب) (لا − د) ۔ ۔

+

تو مح (لا) اول جملہ مشتقہ صح (لا) کا نہین ہے اسواسطے کہ
اگر ع = ۱ اور ق = ۱ ہو تو ہی جو مح (لا) ہو جایگا وہی جملہ مشتقہ ہوگا لیکن جب لا = ا
یا ب یا س ہو غیر بہا کے ہو تو مح (لا) کی اور صح (لا) کی اول جملہ مشتقہ کی ایک ہی علامت ہوتی ہے
اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۲۰۰ کے ہم مساوات صح (لا) = ۰ کی حقیقی قیمتون کا
صح (لا) اور مح (لا) کو اول دو جملی سٹرم کی بنا گردانسی اور باقی جملی حاصل کر کے فیصلہ کر سکتے ہین
سٹرم کی جملون کا سلسلہ جو ح (لا) اور ح۱ (لا) سی حاصل ہوتا ہی وہ اوس سلسلہ سی
کہ صح (لا) اور مح (لا) سی حاصل ہوتا ہی اس سبب سی فرق رکھتا ہی کہ اسکی ہر رقم مین ایک
جز ضربی زائد $(لا - ا)^{ع-۱}$ $(لا - ب)^{ق-۱}$ ہے
پس جب کوئی قیمت لا کی لگائین تو پہلی سلسلہ کی رقمون کی علامتین وہی ہونگین جو
دوسرے سلسلہ کی رقمون کی ہین یا اوسکی بالکل بالعکس ہونگین اسلئے تعداد تغیرات علامت کے وہی رہیگی
اسی معلوم ہوا کہ سٹرم کی جملون کی سلسلہ کی امتحان کرنی سی ہم کو یہہ بات دریافت ہو سکتی ہے
کہ مساوات صح (لا) = ۰ کی کتنی قیمتین حدود معینہ مین واقع ہین یعنی مساوات ح (لا) = ۰ کی
قیمتین جدا جدا منفصل اون حدود مین دریافت ہو جاتی ہین

پس یہہ کچھہ ضرور نہیں کہ سٹرم کی ترکیب سے پہلے ہم متساوی قیمتوں کی تحقیقات مساوات میں کریں بلکہ جب سٹرم کی جملوں کا حساب لگائینگے تو ہم کو خود بخود مساوات کی برابر قیمتوں پر اگر وہ ہونگیں اطلاع اس سبب سے ہوجائیگی کہ اونکی موجود ہونیکی صورت میں باقی اخر صفر ہوگی

(۲۰۲) جس عمل سی کہ مستعان جملی حاصل ہوتی ہیں اوسکی اندر بعد اول جملی کی حاصل ہونے کے مثل عمل وفق اعظم کی ہم مقسوم اور مقسوم علیہ کو اکثر کسی مثبت عدد میں ضرب دیجاتی ہیں یا کسی مثبت عدد پر تقسیم کرجاتی ہیں اور اسی کچھہ فرق عمل میں نہیں اتا اسلئی کہ مستعان جملی مثبت اعداد کی ضرب و تقسیم سی علامتوں میں اپنی متبدل نہیں ہوتے

سٹرم صاحب کے ضابطہ سی ہم مساوات مفروضہ کی حقیقی قیمتوں کی تعداد دریافت کرسکتی ہیں سٹرم کی جملوں کی سلسلہ میں لا کی جگہ متواتر اعداد صحاح مندرج کریں تو اوسی یہہ دریافت ہوگا کہ کونسی دو متصل کی اعداد صحاح کی درمیان قیمتیں واقع ہیں اور اگر یہہ دریافت ہو کہ دو اعداد معینہ کی درمیان ایک قیمت یا زیادہ قیمتیں واقع ہیں تو پہر اون اعداد صحاح کی مابین جو اعداد مکسور واقع ہوں اونکو بجای لا کی مندرج کرتی جاتی ہیں جب تک کہ اخر کو ہمیں یہہ معلوم ہوتا ہے کہ ایک قیمت کل دو عددوں کے درمیان واقع ہے

(۲۰۳) اب ہم بعض مثالیں حل کرتے ہیں

فرض کروکہ ح (لا) = لا^{۳} − ۳ لا^{۲} − ۴ لا + ۱۳

یہاں ح$_{۱}$ (لا) = ۳ لا^{۲} − ۶ لا − ۴

ح$_{۲}$ (لا) = ۲ لا − ۵

ح$_{۳}$ (لا) = + ۱

بموجب دفعہ ۱۹۸ کے مساوات کی تمام قیمتیں مثبت ہیں اب سلسلہ علامتوں کا لا کی قیمتوں کے موافق یہہ ہوگا

لا	ح (لا)	ح$_{۱}$ (لا)	ح$_{۲}$ (لا)	ح$_{۳}$ (لا)
۰	+	−	−	+
۱	+	−	−	+
۲	+	−	−	+
۳	+	+	+	+

یہان جب کہ لا = ۲ کی ہو تو دو تغیر علامت ہین اور جب لا = ۳ کی ہو تو کوئی تغیر علامت نہین ہوتا

اسی معلوم ہوا کہ دو مثبت قیمتین ۲ اور ۳ کی درمیان واقع ہین اور کوئی اور مثبت قیمت نہین ہے

اور یہہ بھی دریافت ہوتا ہی کہ جب لا = −۳ تو تو علامات متواترہ یہہ ہوتے ہین − + − + اور جب لا = −۲

تو وہ + + − + اس سے ایک تغیر علامت −۳ سی −۲ پر نوبت پہونچنی سی کم ہوتا ہے

اسواسطے منفی قیمت −۲ اور −۳ کی درمیان واقع ہی اب دو مثبت قیمتون کی جدا جدا کرنے کے

لئی ہم کو ۲ اور ۳ کے مابین اعداد کو لا کی جگہہ رکہنا چاہئی مثلاً فرض کرو کہ ہم لا = ۲ ½ رکہین

تو علامات متواترہ یہہ ہوتی ہین − − ۰ + پس ایک تغیر علامت واقع ہوتا ہے

خواہ ۰ کو + یا − خیال کرین پس ۲ سی ۲ ½ پر نوبت پہونچانی سی ایک تغیر علامت کم ہوتا ہے

اسواسطے ایک قیمت ۲ اور ۲ ½ کے درمیان واقع ہے

اور اسی معلوم ہوا کہ دوسری قیمت ۲ ½ اور ۳ کے درمیان واقع ہوگی

اب یہہ فرض کرو کہ ح (لا) = لا^۴ − ۶ لا^۳ + ۵ لا^۲ + ۱۴ لا − ۴ = ۰

یہان ح۱ (لا) = لا^۳ − ۹ لا^۲ + ۵ لا + ۷ جز ضربی ۲ کو ساقط کر دیا ہی

ح۲ (لا) = ۱۷ لا^۲ − ۵۷ لا − ۵

ح۳ (لا) = ۱۵۲ لا − ۴۵۷

ح۴ (لا) = +

اس مثال مین ح۴ (لا) کا حساب لگانا پیچیدگی سی خالی نہین مگر ہمارے مطلب برآری کی لئی فقط اتنی بات جاننی کافی ہی کہ

کہ علامت کیا ہی پس جب ہم کو یہہ تحقیق ہو گیا کہ وہ مثبت ہی تو ہم اوسکا حساب ٹہیک ٹہیک نہین کر سکتی اور صرف

ح۴ (لا) = + لکہ لیتے ہین

بموجب دفعہ ۱۹۸ کے مساوات کی تمام قیمتین حقیقی ہین

لا کی قیمتون کے موافق سلسلہ علامات یہہ ہے

	ح(لا)	ح۱(لا)	ح۲(لا)	ح۳(لا)	ح۴(لا)
-۲	+	-	+	-	+
-۱	-	-	+	-	+
۰	-	+	-	-	+
۱	+	+	-	-	+
۲	+	-	-	-	+
۳	+	-	-	-	+
۴	+	+	+	+	+

-۲ اور -۱ کے درمیان ایک اور ۰ اور ۱ کی درمیان ایک تغیر علامت گم ہوتا ہی اور ۳ اور ۴ کی درمیان دو تغیرات علامت گم ہوتے ہین

اگر ہم ۳½ بجای لا کی رکہین تو علامات متواترہ - - + + حاصل ہوتی ہین انہین ایک تغیر علامت ہے پس ایک قیمت مساوات کی ۳ اور ۳½ کی درمیان واقع ہوتی ہین اسیواسطے دوسری قیمت ۳½ اور ۴ کی درمیان واقع ہوتی ہے

اب پہر فرض کرو کہ $ح(لا) = ۲لا^۴ - ۳لا^۲ + ۱۰لا - ۴۹ = ۰$

یہان $ح_۱(لا) = ۴لا^۳ - ۳لا + ۵$ جز ضربی ۲ کو ساقط کر دیا ہے

$ح_۲(لا) = ۱۳لا^۲ - ۱۵لا + ۹۸$

اب یہ بات بادی النظر مین معلوم ہوتی ہی کہ مساوات $ح_۲(لا) = ۰$ کی خیالی قیمتین ہین $ح_۲(لا)$ کبہی کسی لا کی حقیقی قیمت سی معدوم نہین ہو سکتا اسواسطی بموجب دفعہ ۱۹۹ کی اس مثال مین سٹرم صاحب کی زیادہ قیمتون کی دریافت کرنی کی ضرورت نہین ہے جب لا = -∞ تو علامات متواترہ + - + اور جب لا = ∞ تو علامات متواترہ + + + پس مساوات کی دو حقیقی قیمتین اور دو خیالی قیمتین ہین اور حقیقی قیمتون مین سی ایک مثبت اور دوسری منفی بموجب دفعہ ۲۱ کے ہے

پندرہوان باب فوریر کا ضابطہ

(۲۰۴) جس سوال کی حل کرنی مین دو سو برس سی اکثر بڑی بڑی مہندسین توجہ کر رہے تہے وہ سٹرم صاحب کی ضابطہ سی تمام اور کمال حل ہو گیا یہہ ضابطہ پیرس مین سنہ ۱۸۳۵ع مین ایک کتاب مین منطبع ہوا ہے سٹرم صاحب سی پہلی جن مہندسین نی اس سوال کی حل کرنی مین توجہ اور کوشش کی اونمین سے بودن صاحب اور فوریر صاحب کا حال قابل لکہنی کے ہے

ان دو نو مہندسین کی ترکیبین ایک مسئلہ سی نکلتی ہین اور اس مسئلہ کا موجد اہل انگلستان کے نزدیک تو فوریر صاحب ہین اور اہل فرانس کے نزدیک بوڈن اور فوریر دونو کو اس مسئلہ کا توارد ہوا مسائل معادلات کا باب ہین کتاب فوریر کی سنہ ۱۸۳۱ مین منطبع ہوئی اور بوڈن کی کتاب اسی باب مین سنہ ۱۸۲۲ مین منطبع ہوئی مگر اس کی شہادت موجود ہی کہ فوریر نی اپنی اس مسئلہ کو طالب علمون کے روبرو لکچر مین بوڈن کی کتاب کے انطباع سی پہلی بیان کیا تھا اب ہم اس مسئلہ کو ثابت کرتے ہین

(۲۰۵) **فوریر صاحب کا ضابطہ** فرض کرو کہ ح (لا) جملہ جبریہ ن درجہ کا ہو اور $ح_1$ (لا) او $ح_2$ (لا) ۰۰۰ $ح_ن$ (لا) جملی مشتقہ جملہ ح (لا) کی ہون اور سہ کوئی سی مقدار ہو اور صہ دوسری مقدار او سی بڑی جبر مقابلہ کی اعتبار سی ہو تو مساوات ح (لا) = ۰ کی اصلی قیمتین سہ اور صہ کی درمیان بڑی او س از دیادی نہین ہو سکتین جو تعداد تغیرات علامت سلسلہ ح (لا) و $ح_1$ (لا) و $ح_2$ (لا) ۰۰ $ح_ن$ (لا) کو جب لا = سہ کے ہو او س تعداد تغیرات علامت پر اس سلسلہ کے حاصل ہی کہ جب لا = صہ کے ہو

ہم اس تمام سلسلہ ح (لا) و $ح_1$ (لا) و $ح_2$ (لا) ۰۰۰ $ح_ن$ (لا) کو فوریر کے جملے کہینگے فوریر کے جملون مین سی کسی جملہ کی اندر تبدل علامت جب تک نہین واقع ہوگا کہ لا کی نوبت اوس قیمت تک پر پہونچی کہ وہ جملہ کو معدوم کردی اب چار صورتین بحث طلب ہین

اول فرض کرو کہ لا = س کی ح (لا) کو معدوم کرتا ہی اور $ح_1$ (لا) معدوم نہین ہوتا اب لا کی جگہ س - صہ رکہو اور صہ ایک مثبت مقدار ہی تو صہ کو ایسا چہوٹا فرض کر سکتی ہین کہ علامت ح (س - صہ) کی وہی ہو جو - صہ $ح_1$ (س) کی ہی اور بموجب دفعہ ۱۴ کے علامت $ح_1$ (س - صہ) کی وہی ہی جو ح (س) کی ہی پس اگر لا = س - صہ اور صہ کافی چہوٹا فرض کیا جاوے تو ح (لا) اور $ح_1$ (لا) کی مختلف علامتین ہونگین

اسیطرح یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ اگر لا = س + صہ اور صہ چہوٹا کافی مقرر کیا جاوے تو ح (لا) اور $ح_1$ (لا) کی ایک ہی علامت ہو گی

پس جب لا بڑہ کر مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت غیر مکررہ س پر نوبت پہونچتا ہی
تو فوریر کے جملون مین سی ایک تغیر علامت گم ہوجاتا ہے

دوم فرض کرو کہ جب لا = س تو ح (لا) معدوم ہوتا ہی اور اوسکی ساتہہ ہی جملی مشتقہ
ح۱ (لا) و ح۲ (لا) ۰۰۰ ح ر–۱ (لا) تک معدوم ہوجاتی ہین اور ح ر (لا) معدوم نہین ہوتا
س – ھ بجای لا کی رکہو اور ھ مثبت مقدار ہی تو ھ کو ایسا چہوٹا فرض کرسکتی ہین کہ ان رقمون کے سلسلہ کے
ح (س – ھ) و ح۱ (س – ھ) و ح۲ (س – ھ) ۰۰۰ ح ر–۱ (س – ھ) و ح ر (س – ھ)
علامتین جداگانہ وہی ہون جو ان رقمون کے سلسلہ کی ہین کہ
(– ھ)^ر ح ر (س) و (– س)^(ر–۱) ح ر (س) و (– س)^(ر–۲) ح ر (س) ۰۰۰ – ھ ح ر (س) ح ر (س)
دفعات ۱۰ اور ۱۴ دیکہو پس اگر لا = س – ھ اور ھ چہوٹا کافی مقرر کیا جای تو
فوریر کے اول ر + ۱ جملون مین ر تغیرات علامت پیدا ہوتے ہین
اسیطرح یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ اگر لا = س + ھ اور ھ کافی چہوٹا مقرر کیا جاے تو فوریر کے
اول ر + ۱ جملون مین کوئی تغیر علامت نہین پیدا ہوتا
پس جب لا بڑہ کر اپنی نوبت س پر پہونچتا ہی جو مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک ایسی قیمت ہی کہ ر دفعہ مکرر آتی ہے
تو فوریر کے جملون مین سی ر تغیرات علامت گم ہوتے ہین

سوم فرض کرو کہ جب لا = س تو مشتقہ جملون مین سی ایک جملہ معدوم ہوتا ہے
مگر اوسکے طرفین متصلہ کی جملی معدوم نہین ہوتی مثلاً فرض کرو کہ
جب لا = س کے تو ح ر (لا) معدوم ہوتا ہی مگر ح ر–۱ (لا) اور ح ر+۱ (لا) مین سے
کوئی معدوم نہین ہوتا پس اگر ھ چہوٹا کافی فرض کیا جاے تو جب لا = س – ھ تو علامتین
ح ر–۱ (لا) اور ح ر (لا) اور ح ر+۱ (لا) کی جداگانہ وہی ہونگین جو
ح ر–۱ (س) اور ح ر (س) اور ح ر+۱ (س) کی ہین اور جب لا = س + ھ تو علامتین
وہی ہونگین جو ح ر–۱ (س) و – ھ ح ر+۱ (س) و ح ر+۱ (س) کی ہین

پس اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+۱ (س) کی ایک ہی علامت ہو تو فوریر کے جملوں میں دو تغیرات علامت گم ہونگی اور جب لا کی نوبت بڑہ کر س پر پہونچے اور اگر ح ر+۱ (س) اور ح ر+۱ (س) کی مختلف علامتیں ہوں تو فوریر کے جملوں میں نہ تو تغیر علامت گم ہوتا ہی نہ پیدا ہوتا ہے

چہارم فرض کرو کہ جب لا = س تو کئی ایک متواتر جملی معدوم ہو جاتی ہیں مثلاً جب لا = س تو فرض کرو کہ م جملی ح ر (لا) و ح ر+۱ (لا) و ۰ ۰ ح ر+م-۱ (لا) معدوم ہوتے ہیں اور اور ح ر-۱ لا اور ح ر+م (لا) معدوم نہیں ہوتے تو موافق سابق کے عمل کرو اور صہ کو مثبت اور چہوٹا کافی مقرر کرو تو نتایج مفصلہ ذیل بلحاظ م + ۲ ارقام ح ر-۱ (لا) و ح ر (لا) ۰ ۰ ح ر+م-۱ (لا) و ح ر+م (لا) کے حاصل ہونگے

(۱) فرض کرو کہ م جفت ہی اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+م (س) کی ایک ہی علامت ہو تو ارقام میں جب لا = س - صہ کے ہو م تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب لا = س + صہ کی ہو تو کوئی تغیر علامت نہیں واقع ہوگا اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+م (س) کی مختلف علامتیں ہوں تو ارقام میں جب لا = س - صہ کی ہو م + ۱ تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب لا = س + صہ کے ہو تو ایک تغیر علامت واقع ہوگا پس فوریر کی جملوں میں دونو صورتوں کی اندر جب لا کی نوبت س پر پہونچی م تغیرات علامت گم ہونگے

(۲) فرض کرو کہ م طاق ہی اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+م (س) کی ایک ہی علامت ہو تو ارقام میں جب لا = س - صہ کی ہو م + ۱ تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب لا = س + صہ کے ہو تو کوئی تغیر علامت نہیں واقع ہوگا پس فوریر کی جملوں میں جب لا کی بڑہ کر نوبت س پر پہونچتی ہی تو م + ۱ تغیرات علامت گم ہوتی ہیں اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+م کی علامتیں مختلف ہوں تو ارقام میں جب لا = س - صہ کی ہو م تغیرات علامت اور جب لا = س + صہ کے ہو تو ایک تغیر علامت واقع ہوتا ہی پس جب لا کی بڑہ کر نوبت س پر پہونچی ہی تو فوریر کے

جملے م — ا تغیرات علامت کو کم کرتے ہین

المختصر یہہ ہے کہ فوریر کے جملے کبہی تغیر علامت حاصل نہین کرتی بلکہ جب لا کی سرۂ کو نوبت س پر کہ ایک قیمت مساوات ح (لا) = ۰ کی ہی پہونچی ہی تو ایک تغیر علامت گم ہو جاتا ہے

پس ضابطہ ثابت ہوا

(۲۰۶) دفعہ ۲۰۵ مین جو دعوی ہم نی آسانی کی واسطی بیان کیا تہا وہ ثابت ہوا اور اوسے علاوہ اور باتین بہی ثابت ہین ہم نی اونکو اس سبب سی دفعہ ۲۰۵ مین نہین بیان کیا تہا کہ دقت نہ واقع ہو یہہ ظاہر ہی کہ جب فوریر کے جملون کی تغیرات علامت کی تعداد مین تبدل واقع ہوتا ہے باستثنا اوس وجہ کی جو ازدیاد غیر مقررہ سی مساوات معلوم کی قیمت پر نوبت پہونچتی ہی جفت تعداد تغیرات علامت کی گم ہوتی ہی الحاصل اگر متواتر سہ اور اوسی بڑا عدد صہ فوریر کی جملون مین مندرج کرین تو یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

(۱) فرض کرو کہ فوریر کی جملون مین کوئی تغیر علامت گم نہین ہوتا تو کوئی قیمت مساوات کی سہ اور صہ کے درمیان نہین واقع ہوگی

(۲) فرض کرو کہ فوریر کی جملون مین طاق تعداد تغیرات علامت کی گم ہوتی ہی تو اسی ہم کو یقینی معلوم ہوتا ہے کہ قیمتین مساوات کی جنکی تعداد طاق ہو سہ اور صہ کی درمیان واقع ہین لیکن ہم یہہ نہین کہہ سکتے کہ وہ کونسی طاق تعداد ہی الا اوس صورت مین کہ ایک تغیر علامت گم ہوا ہو تو ہم کو یقینی معلوم ہوتا ہی کہ ایک قیمت ہے

(۳) فرض کرو کہ فوریر کی جملون مین جفت تعداد تغیرات علامت کی گم ہوتی ہی تو اسی ہم یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ یا تو کوئی قیمت سہ اور صہ کی درمیان نہین واقع ہی اور اگر واقع ہین تو جفت تعداد اونکی ہے

(۲۰۷) فوریر کے ضابطہ مین یہہ ایک فایدہ ہی کہ اوسکا استعمال آسانی سی ہوسکتا ہی کیونکہ جملہ معلوم کی جملی مشتقہ آسانی سی دریافت ہوجاتی ہین مگر یہہ نقصان بہی ہی کہ اوسمین امتحان لاتعداد کرنی پڑتی ہین اگر دو قیمتین بہت قریب قریب ہون تو اونکی یوٹن کے جنکی اندر وہ واقع ہوتی ہین بہت سی چہوٹی چہوٹی حصی کرنی پڑتی ہین تاکہ اونکی تمیز جدا جدا قسمون سے ہوجائے اور اسکی بہی ضرورت پڑتی ہے

فوریر کے ضابطہ کی موافق عمل کرنی سی پہلی اس بات کا امتحان کرین کہ مساوات برابر قیمتین رکہتی ہی یا نہین اگر ایسا نہ کرینگے تو مکرر قیمتون کی حقیقت تعداد ہم کو معلوم نہین ہوگی

(۲۰۸) بوڈن اور فوریر دونونی ترکیبین یون مشتبہ کی امتحان کرنی کی لکہی ہین تاکہ یہہ بات ظاہر ہو جاوے کہ قیمتین مساوات مفروضہ کی اوس طون کی اندر واقع ہین یا نہین لیکن ان ترکیبون کا بیان کرنا بیفایدہ ہے اسلئی کہ سٹرم کی ضابطہ سی مطلب یقینی حاصل ہو جاتا ہی اور اوسمین کچہ دقت بہی نہین پڑتی ہے

(۲۰۹) یہہ بہی ثابت ہوسکتا ہی کہ فوریر کی ضابطہ کی اندر ڈس کارٹس کے علامتون کا بہی قاعدہ داخل ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات کامل ہے

اگر لا = ۰ فوریر کے جملون مین رکہین تو علامتین وہی ہونگین جو جملہ ح (لا) مین بائین طرف سی دائین طرف تہین اور اگر ہم لا = ∞ کے فوریر کے جملون مین رکہین تو علامتین سب مثبت ہونگین اسی معلوم ہوا کہ فوریر کی ضابطہ کے موافق مساوات ح (لا) = ۰ کی مثبت قیمتین زیادہ تعداد مین ح (لا) کی تغیرات علامت کی تعداد سی نہین رکہہ سکتی

اگر مساوات مفروضہ کامل نہ ہو تو ارقام معدومہ کو لکہکر اونکی امثال صفر بنا کر لکہہ دو اور ان امثال پر علامتین ایسی لگ سکتی ہین کہ فوریر کی جملون مین تغیرات علامت کی اوس حالت مین کہ ان ارقام کا بہی شمار ہو اوتنی ہی تعداد ہو جتنی کہ بغیر رقمون کی تعداد تغیرات علامت تہی

قاعدہ علامات کا وہ جز جو منفی قیمتون سی متعلق ہی وہ اوس جز سی کہ مثبت قیمتون سی متعلق ہے مستنبط ہوسکتا ہے دفعہ ۳۴۱ دیکہو

(۲۱۰) مساوات کی مثبت قیمتون کی اعلی حد غائی دریافت کرنی کی ترکیب نیوٹن صاحب کے ہی وہ بہی فوریر کی ضابطہ مین داخل ہی دفعہ ۹۵ دیکہو اسواسطے کہ اگر ح (لا) = ۰ مساوات ہو تو نیوٹن کی ترکیب کے موافق ہم کو ھ کی قیمت ایسی دریافت کرنی چاہی کہ جب لا = ھ تو فوریر کے جملے تمام مثبت ہون پس موافق ضابطہ فوریر کی مساوات مفروضہ کی کوئی قیمت درمیان لا = ھ اور لا = +∞ کے نہین ہوگی

سولہوان باب لاگرانج کی ترکیب تقریب

(۲۱۱) ہم نے ابھی بیان کیا ہی کہ قیمتین ناطقہ محدودہ کن ترکیبون سی دریافت ہوتی ہین اب ہم یہہ بیان کرتے ہین کہ مساوات کی حقیقی اصم قیمتون کی قدر عددی تقریباً کن حسابون سی دریافت ہوتے ہین

سٹرم صاحب کی ضابطہ سی یہہ بات ہمیشہ ہم کو معلوم ہوسکتی ہی کہ کتنی قیمتین ایک بون معلوم مین واقع ہوسکتی ہین اور پھر ہم اس بون معلوم کو ایسی چھوٹی چھوٹی بون مین تقسیم کرسکتی ہین کہ جنکی درمیان مین جدا جدا ہر ایک قیمت واقع ہو

فرض کرو کہ ہم کو معلوم ہی کہ مساوات کی ایک ہی قیمت ہی اور صرف ایک ہی قیمت دو مقادیر معلوم سہ اور صہ کی درمیان واقع ہی اب ہم یہہ دریافت کرنا چاہتی ہین کہ اس قیمت کی قدر تقریباً کیا ہے سہ اور صہ کی درمیان ایک مقدار لر لو اور اوسکو بجای لا کے ح (لا) مین رکھو تو ح (لر) کی علامت سی ہم کو یہہ بات معلوم ہوجائیگی کہ قیمت سہ اور لر کے درمیان واقع ہے یا لر اور صہ کے درمیان فرض کرو کہ وہ سہ اور لر کے مابین واقع ہی تو پھر بجای لا کے ہم ایک مقدار فر جو مابین سہ اور لر کے واقع ہو رکھینگی اور ح (فر) کے علامت سی یہہ دریافت کرینگے کہ قیمت سہ اور فر کے درمیان واقع ہی یا سہ اور فر کے بیچ مین واقع ہی

اب اسی عمل کو جاری رکھین جب تک کہ قیمت کے قدر عددی تقریباً ہم کو خاطر خواہ حاصل ہو ہر عمل مین جس بون کے درمیان قیمت واقع ہوگی اوسکی تنصیف ہوتی جائینگے

جو عمل یہان ہم نے بیان کیا اوسمین مشقت شاقہ اوٹھانی پڑتی ہی اور بڑا طول طویل عمل کرنا پڑتا ہے اسلیئے ترکیبین ایجاد ہوئین ہین جنسی کہ عمل مختصر ہوجاتا ہی اونمین سی اول ہم لاگرانج کی ترکیب بیان کرتے ہین

(۲۱۲) فرض کرو کہ ح لا = ۰ مساوات ہی جسکی نسبت ہم کو یہہ معلوم ہی کہ اوسکی صرف ایک قیمت دو مثبت صحاح متصلہ ا اور ا + ا کی درمیان واقع ہی لا = ا + $\frac{1}{ی}$ کی رکھو اور لا کی اس قیمت کو مساوات مفروضہ مین مندرج کرو تو ح ($ا + \frac{1}{ی}$) = ۰ اب اگر اس مساوات کو کسری خالص کرین تو ایک مساوات ی کی اوسی درجہ کی حاصل ہوجائیگی جس درجہ کی مساوات لا کی تھی اسکو مح (ی) = ۰ سے

تعبیر کردہ یہہ مساوات د کی صرف ایک قیمت مثبت ہوگی کیونکہ اصل مساوات مین لا کی ایک قیمت ا اور ا+۱ کی درمیان واقع ہی اب ہم صحاح متصلہ ۱ و ۲ و ۳ ۰۰۰ کو مح(د) مین بجای د کے رکھہ رکھہ کر یہہ دریافت کرین کہ وہ کونسی دو نتایج متصلہ ہین کہ جنکی علامتین مختلف ہین فرض کرو کہ یہہ دو نتیجی ب اور ب + ۱ حاصل ہوئی جنکی درمیان د واقع ہی د = ب + $\frac{1}{ی}$ کی مقرر کرو اور اوسکو بجای د کی مندرج کرو تو مح (ب + $\frac{1}{ی}$) = ۰ تو موافق سابق کی یہان بہی ایک مساوات حاصل ہوگی جسکی مقدار مجہول کی قیمت ایک ہی مثبت ہوگی اور ہم صحاح متصلہ س اور س + ۱ ایسی تحقیق کر سکتی ہین جنکی درمیان قیمت ی کی واقع ہو

پس ی = س + $\frac{1}{ذ}$ مقرر کرو اور علی ہذا القیاس

پس لا کی قیمت خاطر خواہ تقریباً اس کسر مسلسل کے صورت مین دریافت ہوجائیگی

$$\text{لا} = \text{ا} + \cfrac{1}{\text{ب} + \cfrac{1}{\text{س} + \dots}}$$

(۲۱۳) اب فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک سی زیادہ قیمتین درمیان صحاح ا اور ا + ۱ کے واقع ہوئی ہین سٹرم صاحب کی ضابطہ کی موافق یا بعض اور قیمتون کے جدا جدا کرنے کے ترکیب سی یہہ ہم تحقیق کر سکتی ہین کہ مساوات کی قیمتون کو جو اون دو صحاح متصلہ کی درمیان واقع ہین کس عدد مین ضرب دین کہ جو حاصل ضرب اسی حاصل ہون کہ وہ مختلف صحاح متصلہ کی درمیان واقع ہون اب مساوات کی ہیئت بدل کر ایک اور ایسی مساوات پیدا کرو کہ اوسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون کی اضعاف موافق اس عدد محصلہ کی ہون یعنی اس مساوات کے قیمتین برابر مساوات مفروضہ کی قیمتون اور اس عدد کے حاصل ضرب کے ہون اور پہر اس بدلی ہوئی مساوات پر موافق دفعہ گذشتہ کے عمل کرو

یا ہم دفعہ گذشتہ کی عمل تعبیر مساوات کی ہیئت بدلنے کی کام مین لائین اس حالت مین مساوات د کی ایک سی زیادہ مثبت قیمتین ہونگین پہر قیمت مین سب سے بڑی صحیح عدد کو ہم تلاش کرین اور پہر جدا جدا حساب د کی مختلف قیمتون کی لگائین یہہ بہی ہو سکتا ہی کہ مساوات د کی

ایک سی زیادہ قیمتین خاص صحاح متصلہ کی درمیان واقع ہون تو مساوات ی سے ان کی اندر تمیز پیدا کرو اور پہر ہر ایک قیمت کا حساب جاری رکھو اور یہی عمل کئی جاؤ

(۲۱۴) مساوات معلوم ح (لا) = ۰ سی ج (ا + $\frac{۱}{د}$) = ۰ کے حاصل کرو

یعنی ح (لا) کو ن درجہ کا فرض کرکے یہہ حاصل کرو کہ

$$ح(ا) + \frac{۱}{د} حَ(ا) + \frac{۱}{د^۲} \frac{حً(ا)}{۲} + \frac{۱}{د^۳} \frac{ح^{۳}(ا)}{\underline{|۳}} + \cdots + \frac{۱}{د^ن} \frac{ح^{ن}(ا)}{\underline{|ن}} = ۰$$

دن مین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$د^ن ح(ا) + د^{ن-۱} حَ(ا) + د^{ن-۲} حً \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{ح^{ن}(ا)}{\underline{|ن}} = ۰$$

پس مساوات ی کی بنانی کی واسطی عددی قیمتین ح (ا) اور حَ (ا) اور حً (ا) . . . دریافت کرنی چاہئی اور ان عددی قیمتون کا حساب موافق دفعہ ۵ کی ہوسکتا ہی مگر دفعہ ۱۰ مین جو ہم نی بیان کیا ہی کہ ایسی حسابون کی کرنی کی ترکیب ہورنر صاحب کی ترکیب کے باب مین بیان ہوگی وہی یہان ہم بیان کرتی ہین اور یہی کیفیت مساوات ی کی بننی کی ہے

دفعات ۵۷ اور ۵۸ پر رجوع کرنی سی لاگرانز کی ترکیب تقریب اسطرح بیان ہوسکتی ہے کہ فرض کرو ایک قیمت مساوات مفروضہ کی ا اور ا + ۱ کی درمیان واقع ہوتی ہی مساوات کی قیمتین بقدر ا کے گہٹاؤ اور پہر مساوات متکافیہ اوسکی بناؤ اور اس اخر مساوات کی ایک قیمت ب اور ب + ۱ کے درمیان دریافت کرو اور قیمتون کو بقدر ب کی گہٹاؤ اور مساوات متکافیہ بناؤ

اور پہر اس اخر مساوات کی قیمت س اور س + ۱ کی درمیان تحقیق کرو اور قیمتون کو بقدر س کے گہٹاؤ اور مساوات متکافیہ بناؤ اور اسی طرح عمل کئی جاؤ تو یہہ کسر متسلسل

$$ا + \cfrac{۱}{ب + \cfrac{}{س + \cdots}}$$

اصل مساوات کی ایک قیمت ہوگی

(۲۱۵) مثال لا^۳ − ۲ لا − ۵ = ۰

دفعہ ۸۰ اکے موافق مساوات کی ایک اصلی قیمت ہی اور بموجب دفعہ ۲۰ کی یہہ قیمت مثبت مقدار ہوگی

اور امتحان سے معلوم ہوتا ہے کہ وہ ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے

فرض کرو کہ لا = ۲ + $\frac{1}{ر}$ تو

ح (۲) = ۲^{۳} − ۲×۲ − ۵ = −۱

ح′ (۲) = ۳×۲^{۲} − ۲ = ۱۰

½ ح″ (۲) = ۳×۲ = ۶

پس مساوات ر کی −ر^{۳} + ۱۰ ر^{۲} + ۶ ر + ۱ = ۰ یعنی

ر^{۳} − ۱۰ ر^{۲} − ۶ ر − ۱ = ۰ اب اسکو مح (ر) = ۰ کہو

یہاں ر = ۱۰ اسکے مح (ر) کو منفی اور ر = ۱۱ مح (ر) کو مثبت بناتا ہے اسواسطے قیمت مطلوب ر کی ۱۰ اور ۱۱ کے درمیان واقع ہوگی ر = ۱۰ + $\frac{1}{ی}$ سے فرض کرو تو

مح (۱۰) = ۱۰^{۳} − ۱۰×۱۰^{۲} − ۶×۱۰ − ۱ = −۶۱

مح′ (۱۰) = ۳×۱۰^{۲} − ۲۰×۱۰ − ۶ = ۹۴

½ مح″ (۱۰) = ۳×۱۰ − ۱۰ = ۲۰

اور مساوات ی کی −۶۱ ی^{۳} + ۹۴ ی^{۲} + ۲۰ ی + ۱ = ۰ یعنی

۶۱ ی^{۳} − ۹۴ ی^{۲} − ۲۰ ی − ۱ = ۰ اسکو صح (ی) = ۰ سے تعبیر کرو

یہاں ی = ۲ کے صح (ی) کو مثبت بناتا ہے پس قیمت مطلوب ی کی ۱ اور ۲ کی درمیان واقع ہے

فرض کرو کہ ی = ۱ + $\frac{1}{د}$ تو

صح (۱) = ۶۱×۱^{۳} − ۹۴×۱^{۲} − ۲۰×۱ − ۱ = −۵۴

صح′ (۱) = ۱۸۳×۱^{۲} − ۱۸۸×۱ − ۲۰ = −۲۵

½ صح″ (۱) = ۱۸۳×۱ − ۹۴ = ۸۹

مساوات د کی −۵۴ د^{۳} − ۲۵ د^{۲} + ۸۹ د + ۱ = ۰ یعنی

۵۴ د^{۳} + ۲۵ د^{۲} − ۸۹ د − ۱ = ۰

اس مساوات سی معلوم ہوتا ہی کہ د کی قیمت ا اور ۲ کے درمیان واقع ہی اسلئی موافق سابق کی عمل کرو

اسی معلوم ہوا کہ لا = ۲ + $\frac{1}{10+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}$ وغیرہ

پس کسر مسلسل کے مقربین $\frac{2}{1}$ و $\frac{21}{10}$ و $\frac{23}{11}$ و $\frac{44}{21}$ ... مین جبر ومقابلہ کا چوالیسوان باب دیکھو

$\frac{44}{21}$ اور قیمت کی اصل قدر مین فرق کم بہ نسبت $\frac{1}{21(21+11)}$ یعنی کم بہ نسبت $\frac{1}{672}$ کے ہے

ایک اور مثال کی واسطی یہہ مساوات $لا^3 - 7 لا + 7 = 0$ لو بموجب دفعہ ۱۰۸ کے مساوات کے

تمام اصلی قیمتین ہین اور بموجب سٹرم صاحب کی ضابطہ کی یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ ایک قیمت درمیان ا

اور $1\frac{1}{2}$ کی واقع ہی اور دوسرے قیمت $1\frac{1}{2}$ اور ۲ کے درمیان اسیواسطی اگر لا = $\frac{لا'}{2}$ سے لکھین

اور مساوات لا' کی بنائین تو مساوات کی ایک قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان اور ایک قیمت ۳ اور ۴ کے

درمیان واقع ہوگی اور مساوات لا' کی یہہ ہی $\left(\frac{لا'}{2}\right)^3 - 7 \frac{لا'}{2} + 7 = 0$

یعنی $لا'^3 - 28 لا' + 56 = 0$

قیمت جو ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے یہہ ہوگی کہ

$2 + \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+}$ وغیرہا

اور قیمت جو ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہو

$3 + \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}$ وغیرہا

ان قیمتون مین سے ہر یک قیمت کے نصف کرنی سی اصل مساوات کی قیمتین دریافت ہو جائیگی

یا ہم لاگرانشر کی ترکیب اصل مساوات پر کام مین لائین اور مساوات کی ہیئت کو ابتداءً متبدل نہ کرین

فرض کرو کہ لا = $1 + \frac{1}{ی}$ تو $\left(1+\frac{1}{ی}\right)^3 - 7\left(1+\frac{1}{ی}\right) + 7 = 0$ اسسے یہہ حاصل ہوگا کہ

$ی^3 - 4ی^2 + 3ی + 1 = 0$ اسکو ح (ی) = ۰ سے تعبیر کرو

یہان ح (۱) مثبت ہی اور ح (۲) منفی اور ح (۳) مثبت ہی پس ایک قیمت مثبت ی کی ۱ اور ۲ کے

درمیان اور دوسری قیمت ۲ اور ۳ کی درمیان واقع ہوگی لو ی = ۱ + $\frac{1}{ی}$ اول قیمت کو تقریباً معلوم کرنی کی واسطی اور ی = ۲ + $\frac{1}{ی}$ دوسری قیمت کو تقریباً دریافت کرنے کے واسطی فرض کرو

مساوات $لا^{۳} - ۷ لا + ۷ = ۰$ کی ایک منفی قیمت ہی اوسکو اسطرح دریافت کرسکتی ہین کہ لا کو −لا کر بدل دو اور مساوات محصلہ کی قیمت کا حساب لگاؤ یعنی مساوات

$$(-لا)^{۳} - ۷ (-لا) + ۷ = ۰$$ کا

چونکہ مساوات $لا^{۳} - ۷ لا + ۷ = ۰$ کی تینون قیمتون کا مجموعہ صفر ہے تو جب دو قیمتون کا حساب تقریباً ہو جائیگا تو تیسری قیمت کا حساب بہی تقریباً معلوم ہو جائیگا

(۲۱۶) اگر لاگرانج کی ترکیب کے اندر ہم کو ایسی مساوات حاصل ہو کہ اوسکی قیمت ایک صحیح عدد ہو تو اصل مساوات کی ہم کو ایک قیمت کسر مسلسل محدود مین دریافت ہوگی یعنی ہم کو قیمت مکسور محدود ناطق حاصل ہوگی لیکن اگر پہلی مساوات مفروضہ کی تمام قیمتین محدود اور ناطق مکسور یا صحیح تحقیق کری ہین اور اونکی موافق اجزاء ضربی مساوات سی ساقط کری ہوتی تو یہہ بات ہرگز نہ واقع ہوگی

(۲۱۷) لاگرانج کی ترکیب مین اس بات کا واقع ہونا ممکن ہی کہ ہم کو ایسی مساوات حاصل ہو کہ وہ کسی مساوات ماقبل سی بالکل مطابقت رکہتی ہو تو اس حالت مین خارج قسمت کسر مسلسل کے مقرر واقع ہونگے اور اس سبب سی کسر مسلسل ایک کسر مکرر یا مدوّرہ بنجائیگی اور اوسکی قیمت مساوات درجہ دوم کے حل کرنے سے معلوم ہوگی جبر مقابلہ کا ۴۵ باب دیکہو

اس مساوات درجہ دوم کی قیمتون مین درجہ دوم کا اصم ملتف ہوگا اور بموجب دفعہ ۴۸ کی اس مساوات کی دونو قیمتین مساوات مفروضہ کی بہی دو قیمتین ہونگین

(۲۱۸) دفعہ ۲۱۵ مین جس عمل کو تمثیلاً مساوات $لا^{۳} - ۷ لا + ۷ = ۰$ کی دوسری ترکیب کے اندر لکہا ہی اوسکو ہم یہان علی العموم لکہتی ہین

ہمارا بڑا مطلب ذہن میں یہہ ہی کہ جب مساوات مفروضہ کی ایک سی زیادہ قیمتین درمیان صحاح متصلہ کی واقع ہوں تو لاگرانژ کی ترکیب کو عمل مین لائین فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ کے

مساوات مفروضہ ہو

اب جملی مستعان ح (لا) اور $ح_1$ (لا) اور $ح_2$ (لا) اور $ح_3$ (لا) ... سٹرم صاحب کے ضابطہ حاصل کرو اور وہان ٹھہر جاؤ جہان ایسا مستعان جملہ حاصل ہو جاے کہ وہ لا کی سب قیمتوں کی واسطے مثبت ہو

دفعہ ۱۹۹ دیکھو فرض کرو کہ ایک سی زیادہ قیمتین مساوات مفروضہ کی صحاح متصلہ

ا اور ا + ۱ کی درمیان واقع ہیں لا کی جگہ ا + $\frac{1}{ی}$ جملوں ح (لا) اور $ح_1$ (لا) اور $ح_2$ (لا) ... مین رکھو اور جو اونکی صورت ہو اونکو ح (ی) و $ح_1$ (ی) و $ح_2$ (ی) ... سی تعبیر کرو اگر جملوں کے دوسرے سلسلہ مین متواتر کوئی سی ایسی دو عدد ب اور ب + ۱ رکھین تو دونو صورتون مین جو تغیرات علامت ہونگی اونکا تفاوت مساوات ح (ی) = ۰ کی تعداد اون قیمتوں کی ہوگی جو ب اور ب + ۱ کی درمیان واقع ہوں وجہ اسکی یہہ ہی کہ ح (ی) اور $ح_1$ (ی) اور $ح_2$ (ی) ... مین جو ب اور ب + ۱ کی مندرج کرنی سی نتایج حاصل ہوتی ہین وہ وہی ہوتے ہین جو سلسلہ ح (لا) اور $ح_1$ (لا) و $ح_2$ (لا) .... مین جداگانہ ا + $\frac{1}{ب}$ اور ا + $\frac{1}{ب+1}$ کے مندرج کرنی سی حاصل ہوتی ہین اسواسطے تغیرات علامت کی تعدادون کا تفاوت برابر مساوات ح (لا) = ۰ کی تعداد اون قیمتوں کی ہوگا کہ جو ا + $\frac{1}{ب}$ اور ا + $\frac{1}{ب+1}$ کی درمیان واقع ہوں یعنی مساوات ح (ی) = ۰ کی تعداد قیمتوں کی جو ب اور ب + ۱ کی درمیان واقع ہوں

پس اگر ہم کو یہہ دریافت ہوا کہ ی کی ایک قیمت سی زیادہ قیمتین درمیان صحاح متصلہ ب اور ب + ۱ کے واقع ہوئین ی کی جگہ ب + $\frac{1}{ی}$ سلسلہ ح (ی) اور $ح_1$ (ی) اور $ح_2$ (ی) ... مین اور ی کی جگہ دو متواتر صحاح متصلہ کی رکھنی سی ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ ی کی ایک سی زیادہ قیمتین دو صحاح متصلہ کے درمیان واقع ہین یا نہیں

اسی طرح عمل کیجائیگی جب تک کہ ہم کو ایسی مساوات حاصل ہوگی کہ جسکی ایک ہی قیمت درمیان دو صحاح متصلہ

کے واقع ہوں اور جب یہہ حاصل ہو جاے تو سٹرم صاحب کی ضابطے کے جملوں کی احتیاج نہیں رہیگی اور بموجب دفعہ ۲۱۲ کے اس خاص قیمت کا حساب ہو جایگا

پس اسطرح قیمتوں کو جدا جدا کر سکتے ہیں اور اوسکا حساب لگا سکتے ہیں اور اونمیں سے کسی کو نہیں چھوڑ دیتے

اب اگر ہم کو ح (ی) وح١ (ی) ح٢ (ی) ۰۰۰ کی قیمتیں دریافت کرنی منظور نہ ہوں بلکہ اونکی علامتیں دریافت کرنی مطلوب ہوں تو ہم سب صورتوں میں ان جملوں کو ی کی ایسی قوتوں میں ضرب دے سکتے ہیں کہ اونکو کسروں سے خالص کردیں اسواسطے کہ مثبت مقدار ہی فرض کی گئی ہے ہر یک قوت اوسکی مثبت ہے مثلاً بجاے ح (ی) کی یعنی بجاے ح (ا + ١/ی) کے ہم یہہ لکھیں کہ

$$ی^{ن} ح (ا) + ی^{ن-١} ح' (ا) + \frac{ی^{ن-٢}}{٢} ح'' (ا) + \cdots + \frac{١}{|ن} ح^{ن} (ا)$$

اور ح (لا) کو ن درجہ کا فرض کرلیں

سترہواں باب

نیوٹن صاحب کی ترکیب تقرب اور اوسپر فوریر کا ضمیمہ

(۲۱۹) اب ہم ترکیب تقرب نیوٹن صاحب کی لکھتے ہیں جسسے قیمت مساوات کی قدر عددی کا حساب تقریباً ہوتا ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات ہے اور اوسکی ایک قیمت خاص حدود سہ اور صہ کی درمیان واقع ہے اور ان حدوں میں فرق بقدر ایک چھوٹی کسر کے ہے فرض کرو کہ س ایک ایسی مقدار سہ اور صہ کی درمیان ہے کہ وہ قیمت مطلوب سے تقرب اولین رکھتی ہے اور س + صہ ٹھیک قیمت ہے صہ ایک چھوٹی سی کسر ہے جسکا تشخیص کرنا منظور ہے

پس ح (س + صہ) = ۰ یعنی بموجب دفعہ ۱۰ کے

$$ح (س) + صہ ح' (س) + \frac{صہ^{٢}}{١ \times ٢} ح'' (س) + \frac{صہ^{٣}}{|٣} ح''' (س) + \cdots + \frac{صہ^{ن}}{|ن} ح^{ن} (س) = ۰$$

اب چونکہ صہ ایک چھوٹی سی کسر فرض کی گئی ہے تو صہ٢ اور صہ٣ ۰۰۰ بمقابلہ صہ کے

نہایت چھوٹی ہونگی پس اگر دوسری قوت اور اونسی بڑی قوتون کو اوسپر کی مساوات میں ساقط کردین تو
یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ح(س) + صہ ح'(س) = ۰$$

$$پس\ صہ = - \frac{ح(س)}{ح'(س)}$$

تو یہہ فرض کرکے کہ ہم کو اسطرح یہہ قیمت صہ کی تقریباً دریافت ہوئی ہی $س - \frac{ح(س)}{ح'(س)}$
ایک تقرب جدید مساوات مفروضہ کا حاصل ہوا اس تقرب جدید کو $س_۱$ سی تعبیر کرو تو
موافق سابق کی عمل کرنی سی $س_۱ - \frac{ح(س_۱)}{ح'(س_۱)}$ ایک اور تقرب جدید حاصل ہوگا اور علی ہذا القیاس
اب ہم اون شرائط کا امتحان کماحقہ کرتی ہین جنکی موافق یہہ ترکیب بغیر کسی خطا اور نقص کے
استعمال مین آئی اور ایسی امتحان کا ضروری ہونا ظاہر ہی کیونکہ اگر ح'(س) بمقابلہ
ح(س) کی چھوٹا ہو تو قیمت تقریبی صہ کی ایک چھوٹی کسر نہین ہوگی اور چھوٹی کسر ہونا
اوسکا لوازمات سے ہے

(۲۲۰) ایک مساوات پر ہم نیوٹن صاحب کی ترکیب تقرب کا امتحان کرتی ہین اور یہہ مساوات وہی ہی
جو خود نیوٹن صاحب نی منتخب کی ہی یعنی $لا^۳ - ۲لا - ۵ = ۰$ کو ح(لا) = ۰ سے تعبیر کرو
یہان لا = ۲ کے ح(لا) کو منفی اور لا = ۳ کے ح(لا) کو مثبت بناتا ہے اسسے
معلوم ہوا کہ مساوات ح(لا) = ۰ کی ایک قیمت ۲ اور ۳ کی درمیان واقع ہی اور لا = $۲\frac{۱}{۲}$
کے ح(لا) کو مثبت بناتا ہی تو قیمت درمیان ۲ اور $۲\frac{۱}{۲}$ کی واقع ہوگی اور لا = ۲٫۲ بھی
ح(لا) کو مثبت بناتا ہی تو قیمت ۲٫۱ سی فرق بقدر ۰٫۱ کی بھی نہین رکھتی پس فرض کرو کہ
س = ۲٫۱ تو

$$س_۱ = س - \frac{ح(س)}{ح'(س)} = س - \frac{س^۳ - ۲س - ۵}{۳س^۲ - ۲}$$

$$= ۲٫۱ - \frac{۰٫۰۶۱}{۱۱٫۲۳} = ۲٫۱ - ۰٫۰۰۵۴ \text{ تقریباً}$$

پس $س_۱ = ۲٫۰۹۴۶$

پس ایک اور تقرب جدید کے لئے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$س_۲ = س_۱ - \frac{ح(س_۱)}{ح'(س_۱)} = ۲٫۰۹۴۶ - ۰٫۰۰۰۰۴۸۵۲ \text{ تقریباً}$$

$$= ۲٫۰۹۴۵۵۱۴۸$$

(۲۲۱) یہہ عمل نظریات مین آسان ہی اور عملیات مین مشکل نہین ہی مگر اوسمین چند احتیاطین ضرور ہین تاکہ کامیابی کا اوسمین یقین ہوا اب ہم اون احتیاطون کا بیان کرتے ہین فرض کرو کہ س قدر تقریبی مساوات کی قیمت کی ہی اور $س_۱ = س - \frac{ح(س)}{ح'(س)}$ اب ہم کو یہہ یقین بغیر تحقیقات کما حقہ کی نہین ہو سکتا کہ

کہ $س_۱$ بہ نسبت س کی اصل قیمت سی اقرب ہی مثال گذشتہ مین اول ہم نی یہہ تحقیق کیا کہ ایک قیمت ۲ اور ۲٫۱ کے درمیان واقع ہی اور پہر یہہ فرض کیا کہ ۲٫۱ تقرب اولین ہے اور اوسی ایک تقرب جدید ۲٫۰۹۴۶ استخراج کیا لیکن یہہ ہم کو تحقیق نہین ہے کہ ۲٫۰۹۴۶ بہ نسبت ۲٫۱ کی اصل قیمت سی اقرب ہی لیکن اگر بجای لا کی ۲٫۱ کے رکھو تو ح (لا) مثبت ہوتا ہی پس قیمت مطلوب ۲ اور ۲٫۱ کے درمیان واقع ہے اور اسی ہم کو معلوم ہوا کہ ۲٫۰۹۴۶ بہ نسبت ۲٫۲ کی اصل قیمت سی قریب تر ہی لیکن اب بہی ہم کو یہہ نہین معلوم کہ ۲٫۰۹۴۶ بہ نسبت ۲٫۱ کی اصل قیمت سی زیادہ قریب ہی اگر ہم ۲٫۰۹۴۶ کو ح (لا) مین رکہین تو ح (لا) مثبت دریافت ہوگا تو ابہی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ قیمت ۲٫۰۹۴۶ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتا ہی پس ۲٫۰۹۴۶ بہ نسبت ۲٫۱ کے زیادہ قریب اصل قیمت سی ہے

(۲۲۲) فوربر صاحب نی ایک قاعدہ ایسا لکہا ہی کہ اوسکی موافق عمل کرنے سی یہہ مشقت بار بار امتحان کرنی کی نہین پڑتی جیسی کہ اوپر کی مثال مین پڑی تہی اور جب بعض شرائط پورے ہوجاتی ہین تو پہر نیوٹن صاحب کی ترکیب اس قاعدہ سی مستند ہوجاتی ہے

نیوٹن صاحب کی ترکیب کا ضمیمہ فوریر کا جملہ معلوم کی اول جملہ مشتقہ کی ایک خاصیت پر موقوف ہے جسکو ہم ثابت کرتے ہین

(۲۲۳) اگر ا اور ب دو مقداریں ہوں تو کوئی مقدار درمیان ا اور ب کی ایسی ضرور ہوگی کہ

ح(ب) − ح(ا) = (ب − ا) حَ(لر)

اسواسطے کہ فرض ح(لا) بتعبیر ح(لا) − ح(ا) − (لا − ا)/(ب − ا) [ح(ب) − ح(ا)] کو کرتا ہے
تو لا = ا کے ہونے سی یا لا = ب کے ہونے سی ح(لا) معدوم ہوتا ہے اسیواسطے
بموجب دفعہ ۱۰۲ کی مساوات حَ(لا) = ۰ کی قیمت درمیان ا اور ب کی ضرور ہوگی اور
حَ(لا) = حَ(لا) − (ح(ب) − ح(ا))/(ب − ا) اسی معلوم ہوا کہ کوئی مقدار لر درمیان
ا اور ب کی ضرور ایسی ہوگی کہ حَ(لر) − (ح(ب) − ح(ا))/(ب − ا) = ۰
اسیواسطے ح(ب) − ح(ا) = (ب − ا) حَ(لر)

(۲۲۴) فرض کرو کہ ب بڑا ا سی ہی تو ح(ب) جبر مقابلہ کی اعتبار سی بڑا ح(ا) سی ہوگا
اگر حَ(لر) مثبت ہی اور چھوٹا ح(ا) سے ہوگا اگر حَ(لر) منفی ہے
اگر حَ(لا) مثبت ہی درمیان لا = ا اور لا = ب کے ہو تو حَ(لر) ضرور مثبت ہوگا
اور اگر حَ(لا) منفی درمیان لا = ا اور لا = ب کی ہو تو حَ(لر) ضرور منفی ہوگا
پس اسی یہہ نتیجہ پیدا ہوا کہ اگر ح(لا) کسی بون کے درمیان استقلال کی ساتہہ مثبت ہو
تو ح(لا) اوس بون کی درمیان لا کی ساتہہ بڑہیگا اور اگر حَ(لا) استقلالا منفی ہو
تو ح(لا) اوس بون کی درمیان لا کی ساتہہ کہٹیگا اس کمی اور زیادتی سے مراد
ہماری جبر مقابلہ کی زیادتی اور کمی سی ہی اب ہم اپنی نتیجہ کو اسطرح بیان کیا کرتے ہین
کہ اگر حَ(لا) کی کسی بون کی درمیان ایک ہی علامت ہو اور ح(لا) کی وہی علامت ہو جو حَ(لا) کی ہے
تو جیسا لا اوس بون کی درمیان بڑہیگا ایسا ہی ح(لا) تعداداً بڑہیگا
اور اگر ح(لا) کی علامت مخالف حَ(لا) کے علامت کے ہو تو
جیسا لا اول بون کے درمیان کہٹیگا ایسا ہی ح(لا) گہٹیگا

(۲۲۵) اب ہم فوریر کے قاعدہ کو بیان کرتی ہین اور ثابت کرتی ہین فرض کرو کہ ح(لا) = مساوات ہو

تھکی صرف ایک ہی قیمت درمیان سہ اور صہ کی ہو اور فرض کرو کہ حَ (لا) = ۰ کسی کوئی
قیمت درمیان سہ اور صہ کی نہیں ہی اور حً (لا) = ۰ کی بہی کوئی قیمت سہ اور صہ کے
مابین نہیں ہی تو اس حالت میں نیوٹن کی ترکیب تقریب ضرور کامیابی کے ساتہہ چلیگی
اگر اوسکا آغاز وہان سی کرین جہان ح (لا) اور حً (لا) کی ایک ہی علامت ہو
اور پہر آگے اوسکو جاری کرین

ہماری فرضون سی یہہ استخراج ہوتا ہی کہ ح (لا) علامت کو صرف ایک دفعہ سہ اور صہ
کے درمیان بدلتا ہی اور حَ (لا) اور حً (لا) اپنی علامت سہ اور صہ کے درمیان
نہین بدلتی ہم صہ − سہ کو مثبت فرض کرینگے

(۱) فرض کرو کہ ح (لا) اور حً (لا) کی جب لا = سہ کے ہو ایک ہی علامت ہے
یہہ تقریب اولین فرض کرو تو نیوٹن کے ترکیب کے موافق تقریب ثانی سہ − ح (سہ) / حَ (سہ) ہے
اور فرض کرو کہ سہ + صہ قیمت کی بالکل صحیح قدر ہے تو

ح (سہ + صہ) = ۰ اب بموجب دفعہ ۲۲۳ کے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

ح (سہ + صہ) − ح (سہ) = صہ حَ (لر) جہان لر درمیان سہ اور سہ + صہ کے
واقع ہی پس صہ = − ح (سہ) / حَ (لر) اور ٹھیک قدر قیمت کی سہ − ح (سہ) / حَ (لر) ہے
پس ہم کو یہہ ثابت کرنا رہا کہ سہ − ح (سہ) / حَ (سہ) بہ نسبت سہ کے اصلی قیمت سے زیادہ
قریب ہی چونکہ صہ ضرور ایک مثبت مقدار ہی تو ح (سہ) اور حَ (لر) کی مختلف علامتیں ہین
اور ح (سہ) کی وہی علامت ہی جو حً (سہ) کی علامت ہی اور اسیواسطی حَ (لر)
اور حً (سہ) مختلف العلامت ہین اسی معلوم ہوا کہ حَ (لا) تعداداً ایسا کم ہوتا ہے
جیسا لا درمیان سہ اور صہ کے زیادہ ہوتا ہی پس حَ (لر) تعداداً کم
حَ (سہ) سی ہوا اسیواسطی − ح (سہ) / حَ (سہ) ایک مثبت مقدار ہے جو تعداداً کم
بہ نسبت مقدار − ح (سہ) / حَ (لر) کے ہی اسی ثابت ہوتا ہے کہ نیوٹن کا تقریب ثانی

قیمت حقیقی کی قدر کے زیادہ قریب بہ نسبت تقرب اولین کے ہے

فرض کرو $\text{سہ}_1 = \text{سہ} - \frac{\text{ح (سہ)}}{\text{حَ (سہ)}}$ توح (سہ۱) اور حً (سہ۱) کی ایک ہی علامت ہے

اور تقریب سہ۱ سے جاری ہوتا ہے

(۲) فرض کرو کہ ح (لا) اور حً (لا) کی جب لا = صہ کے ہو ایک ہی علامت ہے صہ کو تقرب اولین فرض کرو تو نیوٹن صاحب کی ترکیب کے موافق تقرب ثانی $\text{صہ} - \frac{\text{ح (صہ)}}{\text{حَ (صہ)}}$ ہوگا

فرض کرو کہ صہ + صہ قیمت کی صحیح صحیح قدر ہی تو ح (صہ + صہ) = ۰

اب بموجب دفعہ ۲۲۳ کے ح (صہ + صہ) − ح (صہ) = صہ حَ (لر) آہمین لر درمیان صہ اور صہ + صہ کے واقع ہی پس صہ = $- \frac{\text{ح (صہ)}}{\text{حَ (لر)}}$ پس اب ہم کو یہہ ثابت کرنا رہا کہ صہ − $\frac{\text{ح (صہ)}}{\text{حَ (صہ)}}$ قیمت حقیقی کی زیادہ تر قریب بہ نسبت صہ کے ہی چونکہ صہ ضرور منفی ہی تو ح (صہ) اور حَ (لر) کی ایک ہی علامت ہی اور ح (صہ) کی وہی علامت ہے جو حً (صہ) کی علامت ہی اور سیواسطے حَ (لر) اور حً (صہ) کی ایک ہی علامت ہے اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۲۲۴ کے کہ حَ (لا) تعداداً ایسا ہی زیادہ ہوتا ہے جیسا کہ لا درمیان سہ اور صہ کی زیادہ ہوتا ہی پس حَ (لر) تعداداً کم بہ نسبت حَ (صہ) کے ہوا اسیواسطے $\frac{\text{ح (صہ)}}{\text{حَ (صہ)}}$ ایک مثبت مقدار ہی اور تعداد چھوٹی بہ نسبت مثبت مقدار $\frac{\text{ح (صہ)}}{\text{حَ (لر)}}$ کے ہی اسی ثابت ہوتا ہی کہ نیوٹن صاحب کی ترکیب کے موافق تقرب ثانی حقیقی قیمت کے قدر کے قریب تر بہ نسبت تقرب اولین کے ہے

فرض کرو کہ $\text{صہ}_1 = \text{صہ} - \frac{\text{ح (صہ)}}{\text{حَ (صہ)}}$ توح (صہ۱) اور حً (صہ۱) کی ایک ہی علامت ہی اور تقرب صہ۱ سے آگے جاری ہوگا

(۲۲۶) دفعہ گذشتہ سی بخوبی ثابت ہوگیا کہ فوریئر نے جو شرائط لکھی ہیں وہ نیوٹن صاحب کی ترکیب تقریب کی کامیابی کی لئی کافی ہیں جب یہہ شرائط پوری ہوجائیں اور اوس حد سی کہ جسکے موافق ح (لا) اور حً (لا) کی ایک ہی علامت ہو تقرب شروع ہوکر جاری ہو تو قیمتیں متواترہ حاصل

ہونگین جنمین سی ہریک قیمت کی اصل قدر تک متواتر بڑہتی ہی بشرطیکہ حد جسی کہ ہم چلی ہین چہوٹی قیمت کی اصل قدر سی ہو اور گہٹتی ہی اگر حد مذکور بڑی قیمت کی اصل قدر سی ہو

اب ہم اختصار کے ساتھہ یہہ ثابت کرینگے کہ فوریر کی شرایط کا ہونا ضروری ہے

ایک قیمت مفروضہ س سی ہم چلین تو نیوٹن صاحب کا تقرب ثانی س − ح(س)/حَ(س) زیادہ کرنی سی صحیح کریگا اور قیمت کی قدر حقیقی ح(س)/حَ(ر) کے زیادہ کرنی سی حاصل ہوگی اسی ثابت ہوا کہ حَ (لا) کے استواری علامت ضروری تاکہ یہہ ہم کو تحقیق ہو کہ حَ (س) اور حَ (ر) کی ایک ہی علامت ہے اگر ان مقداروں کی ایک علامت نہ ہو تو صحت نیوٹنی کی علامت غلط ہوگی اور نیوٹن کا تقرب ثانی قیمت کی اصلی قدر سی بہ نسبت تقرب اولین کے بڑہا ہوا ہوگا

استواری علامت حً (لا) کی ضروری تاکہ اوسی یہہ تحقیق ہو کہ حَ (ر) تعداد کم بہ نسبت حَ(س) کے ہو اگر یہ صورت نہ ہو تو صحت نیوٹنی تعداد بڑی بہ نسبت اصلی صحت کی ہوگی اور اسطرح صحت کی ٹہیک علامت فرض کرنی سی قیمت کی حقیقی قدر درمیان نیوٹن کے تقرب اول اور دوم کے درمیان واقع ہوگی اس حالت مین نیوٹن کا تقرب ثانی قریب تر قیمت کے حقیقی قدر کے بہ نسبت تقرب اول کی ہوسکتا ہی مگر اوسکا ہونا کچھہ ضروری نہین

(۲۲۷) دفعہ ۲۲۰ کی مثال مین ثابت ہوسکتا ہی کہ مساوات ح (لا) = ۰ صرف ایک قیمت ۱٫۲ اور ۱٫۳ کے درمیان واقع ہی اور مساوات حَ (لا) = ۰ اور حً (لا) = ۰ کی کوئی قیمت ان حدود کی درمیان نہین واقع ہوتی اور جب لا = ۱٫۲ کے ہو تو ح (لا) اور حً (لا) دونو مثبت ہین پس نیوٹن کی ترکیب سے یقینی کامیابی حاصل ہوگی اگر اوسکا آغاز اور ابتدا حد ۱٫۲ سے کرین

ایک اور مثال لا۳ − ۷ لا + ۷ = ۰ کی لو اسکو ح (لا) = ۰ سی تعبیر کرو امتحان سی یہہ بات ثابت ہوسکتی ہی کہ مساوات کی ایک قیمت ۱٫۳ اور ۱٫۴ کے درمیان واقع ہے اور حَ (لا) = ۰ اور حً (لا) = ۰ کی قیمتین درمیان ان حدون کی نہین واقع ہین اور نیز جب لا = ۱٫۳ تو ح (لا) اور حً (لا) دونو مثبت ہین پس اگر حد ۱٫۳ سی آغاز اور

اجزا کرین تو نیوٹن کی ترکیب تقرب سی کامیابی یقینی حاصل ہوگی

(۲۲۸) اب ہم یہہ بتلاوینگے کہ سرعت تقرب کا تخمینہ کسطرح ہوتا ہی فرض کرو کہ عمل کی کسی مرتبہ مین ہم کو س کے قیمت کی قدر تقریبی حاصل ہوئی ہی تو قیمت کی صحیح قدر س – ح (س) / ح´ (ل) ہے

پس عددی قدر غلطی کی اس مرتبہ مین ح (س) / ح´ (ل) ہی اسکو ر سی تعبیر کرو اور اسکے مابعد قدر تقریبی س – ح (س) / ح´ (س) اور اب غلطی کی عددی قدر ح (س) / ح´ (ل) – ح (س) / ح´ (س)

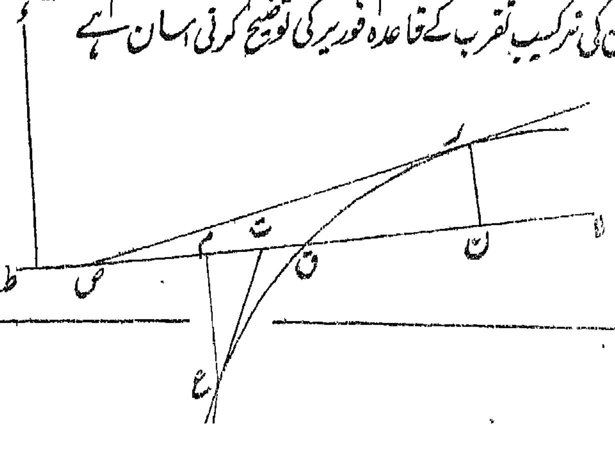
یعنی ر ح´ (س) – ح´ (ل) / ح´ (س) اور بموجب دفعہ ۲۲۳ کی ہم کو معلوم ہی کہ ح´ (س) – ح´ (ل) = (س – ل) ح´´ (لو) اسمین لو درمیان س اور ل کے واقع ہوتا ہے پس غلطی

ر (س – ل) ح´´ (لو) / ح´ (س) ہی اب ل درمیان س اور قیمت کی حقیقی قدر کی درمیان واقع ہوتا ہی پس س – ل چھوٹا ر سی ہوا پس غلطی کم بہ نسبت ر² ح´´ (لو) / ح´ (س) کے ہی اب فرض کرو کہ ح´´ (لا) کی سب سی بڑی قیمت جو درمیان ان حدود کی ہو وہ سب سی چھوٹی قیمت ح´ (لا) پر تقسیم کی جاوی اور خارج قسمت ق سی تعبیر ہو تو غلطی بدرجہ اولی کم ق ر² سے ہوگی

دفعہ ۲۲۰ کے مثال مین قیمت ۲ اور ۲٫۱ کے درمیان واقع ہوتی ہی

پس ق کی قیمت دریافت کرنی کی واسطی قیمت ۶ لا کو جب لا = ۲٫۱ کے ہو قیمت ۳ لا² – ۲ پر جب لا = ۲ کے تقسیم کرو تو ق = ۱٫۲۶ اور چونکہ ق تقریباً واحد کے برابر ہے تو ٹھیک مرتبے اعشاریہ تقریباً مین قریب دو چند کے ہر دفعہ کے عمل مین ہونگے

(۲۲۹) جو خطوط منحنی کی مسائل مین اصول علم مفصولات کو کام مین لانا طالب علم جانتی ہین اسکو علم ہندسہ کے موافق نیوٹن کی ترکیب تقرب کے قاعدہ فوریر کی توضیح کرنی آسان ہے



فرض کرو کہ ع ق ایک خط منحنی کا حصہ مساوات ی = ح (لا) سے دریافت ہوتا ہے اور ءم اور ءن ہم کو معلوم ہین اور ءق کی قیمت دریافت کرنی ہی یعنی وہ نقطہ دریافت کرنا ہی جہان خط منحنی محور کو کاٹتا ہے

نقطہ ع پر ظاہر ہی کہ ح (لا) منفی ہی اگر طا محور ی کی مثبت سمت مقرر کی جاے اور حً (لا) بہی نقطہ ع پر منفی ہی کیونکہ خط منحنی ع پر محور لا کے لحاظ سے محدب ہے اور مماس ع ت کہینچو اور فرض کرو کہ ءم = سہ تو م ت = − ح (سہ) / حَ (سہ) موافق علم حسبانات کے ہوگا

پس م سی تقرب نیوطنی شروع ہوتا ہی اور ت کی طرف چلتا ہی اور چونکہ ت درمیان م اور ن کی واقع ہوتا ہی تو اسی ظاہر ہوتا ہی کہ ت سی اجرا ترکیب تقرب کا کامیابی کیساتہ ہوسکتا ہے نقطہ ر پر ح (لا) مثبت ہی اور حً (لا) منفی ہی مماس رص کہینچو اور تقرب نیوطنی ن سے شروع ہوتا ہی اور ص کی طرف جاری ہوتا ہی اور ص اور ن مختلف سمت مین ق کیے واقع ہین علاوہ برین یہہ یقینی نہین ہی کہ ص ق چہوٹا ق ن سی ہی اور یہہ یقینی نہین ہے کہ تقرب ص سی جاری ہوتا ہی پس تقرب ن سی شروع ہوتا ہے

طالب علم شکلین مرتسم کرکی شرط حَ (لا) اور حً (لا) کے حدود مذکور مین علامت نہ بدلنی کی توضیح کرسکتا ہے

اٹھارہوان باب ہورنر کی ترکیب

(۲۳۰) قیمت مساوات کی قدر تقریباً دریافت کرنی کی لئی اب ہم ترکیب تقرب وہ لکہی ہین جسکو ہورنر صاحب نی ایجاد کیا ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات ہو تو ح (ط + لا) = ۰ وہ مساوات ہوگی جسکی قیمتین اول مساوات کی قیمتون سی بقدر ط کے کم ہونگین

مساوات ح (لا + ط) کو تشریح کرکے لکہین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ح (ط) + لا ح′ (ط) + لا^{2} $\frac{ح'' ط}{1\times 2}$ + لا^{3} $\frac{ح''' (ط)}{|3}$ + ۰۰۰ + لا^{ن} $\frac{ح^{ن} (ط)}{|ن}$ =

اب ہونر صاحب کی ترکیب کا جزاعظم یہہ ہی کہ اس اخر مساوات کی ہر مثال کو نظم اور خوش ترتیبی سے دریافت کریں اور اس عمل کی فایدہ مند ہونی کا ذکر ہم نی دفعات ۱۱ اور ۱۴۲ مین کیا ہے

(۲۳۱) تمثیلاً فرض کرو

ح (لا) = ا لا^{5} + ب لا^{4} + س لا^{3} + د لا^{2} + ر لا + ف

تو ح (ط) = ا ط^{5} + ب ط^{4} + س ط^{3} + د ط^{2} + ر ط + ف

ح′ (ط) = ۵ ا ط^{4} + ۴ ب ط^{3} + ۳ س ط^{2} + ۲ د ط + ر

$\frac{1}{|2}$ ح″ (ط) = ۱۰ ا ط^{3} + ۶ ب ط^{2} + ۳ س ط + د

$\frac{1}{|3}$ ح‴ (ط) = ۱۰ ا ط^{2} + ۴ ب ط + س

$\frac{1}{|4}$ ح⁗ (ط) = ۵ ا ط + ب

$\frac{1}{|5}$ ح (ط) = ا

(۱) ح (ط) کا حساب دفعہ ۵ کی طرح کریں تو

ا = ا

ا ط + ب = ع کے لکہو

ع ط + س = ا ط^{2} + ب ط + س = ق کے لکہو

ق ط + د = ا ط^{3} + ب ط^{2} + س ط + د = ی کے لکہو

ی ط + ر = ا ط^{4} + ب ط^{3} + س ط^{2} + د ط + ر = ص کے لکہو

ص ط + ف = ا ط^{5} + ب ط^{4} + س ط^{3} + د ط^{2} + ر ط + ف = ح (ط)

یہاں ہر سطر اسطرح حاصل ہوتی ہی کہ ماقبل کی سطر کو ط مین ضرب دی اور حاصل ضرب پر مقادیر ب اور س اور د اور ر اور ف کو زیادہ کیا ہے

(۲) ح′ (ط) کا حساب بہی اسطرح کریں جسطرح ح (ط) کا حساب کیا ہی اور ا و ع و ق و ر

اور ص کو بجای ا و ب و س اور د اور ر کے کام مین لائین

ا = ا

ا ط + ع = ۲ ا ط + ب = ر کے لکھو

ر ط + ق = ۳ ا ط^{2} + ۲ ب ط + س = جر کے لکھو

جر ط + ی = ۴ ا ط^{3} + ۳ ب ط^{2} + ۲ س ط + د = سر کے لکھو

سر ط + ص = ۵ ا ط^{4} + ۴ ب ط^{3} + ۳ س ط^{2} + ۲ د ط + ر = ح ط

(۳) $\frac{1}{\lfloor 2}$ ح″ (ط) کا حساب مثل ح (ط) کے کرو اور حروف ا اور بر و جر و سر کو کام مین لاؤ تو

ا = ا

ا ط + بر = ۳ ا ط + ب = شر کے لکھو

شر ط + جر = ۶ ا ط^{2} + ۳ ب ط + س = صر کے لکھو

صر ط + سر = ۱۰ ا ط^{3} + ۶ ب ط^{2} + ۳ س ط + د = $\frac{1}{\lfloor 2}$ ح″ (ط)

(۴) ایسطرح $\frac{1}{\lfloor 3}$ ح‴ (ط) کا حساب کرو اور ا و سر و صر کو کام مین لاؤ

ا = ا

ا ط + سر = ۴ ا ط + ب = فر کے لکھو

فر ط + صر = ۱۰ ا ط^{2} + ۴ ب ط = $\frac{1}{\lfloor 3}$ ح‴ (ط)

(۵) اب $\frac{1}{\lfloor 4}$ ح⁗ (ط) کا ایسطرح حساب کرسکتی ہین ا اور فر کو کام مین لاؤ

ا = ا

ا ط + فر = ۵ ا ط + ب = $\frac{1}{\lfloor 4}$ ح⁗ (ط)

(۶) اخر ا = $\frac{1}{\lfloor 5}$ ح (ط)

اوپر کے عمل کو اس ترتیب سے لکھو تو نہایت آسانی ہوگی

ا	ب	س	د	ر	ق
	اط / ع	ع ط / ن	ق ط / ی	ی ط / ص	ص ط / ح ط
	اط / ر	ب ط / ح	ح ط / س	س ط / ح (ط)	
	اط / ش	ب ط / ص	ص ط / ½ ح″ (ط)		
	اط / ف	ف ط / ½ ح″ (ط)			
	اط / ½ ح″″ (ط)				

ہر خط عرضی کے نیچے اوسی اوپر کے دو مقداروں کا حاصل جمع لکہا ہے

پس ہم نی ترکیب ہورنر کی عمل کی مساوات ح (ط + لا) = ۰ کی مثال بتائی کی جب وہ پانچوین درجہ کی ہو بتلا دی خواہ مساوات کا درجہ کچہ ہی ہو عمل یہی ہو گا

(۲۳۲) مثلاً فرض کرو کہ ہم کو ایک مساوات معلوم ہی جسکی ایک قیمت ۳۰۰ اور ۴۰۰ کی درمیان واقع ہی ایک دوسری مساوات بناؤ جسکی قیمتین بہ نسبت اول مساوات کی بقدر ۳۰۰ کی کم ہون تو دوسری مساوات کی قیمتین ۰ اور ۱۰۰ اکے درمیان واقع ہونگین اور امتحان سی یہہ دریافت کرو کہ ۱۰ اکا کونسا بڑی سی بڑا اضعاف اس قیمت مین شامل ہی فرض کرو کہ وہ ۷۰ ہے اب تیسری مساوات بناؤ جسکی قیمت دوسری مساوات سی بقدر ۷۰ کے کم ہو تو اس تیسری مساوات کی قیمتین ۰ اور ۱۰ اکے درمیان واقع ہونگین اب امتحان سی یہہ دریافت کرو کہ قیمت مین کونسا بڑی سی بڑا صحیح عدد شامل ہی فرض کرو کہ وہ ۲ ہے اب چوتہی مساوات بناؤ جسکی قیمت تیسری مساوات سی بقدر ۲ کے کم ہو تو اس چوتہی مساوات کی قیمت ۰ اور ۱ اکے درمیان واقع ہونگین اب امتحان ہی یہہ دریافت کرو کہ کتنی دسوین حصہ زیادہ سی زیادہ اس قیمت مین شامل ہین

فرض کرو کہ وہ آٹھہ دسوین ہین تو اس پانچوین مساوات کی قیمت ۰ اور ۱ اکے

درمیان واقع ہی اور امتحان سی دریافت کرو کہ زیادہ سی زیادہ کتنی سوین حصہ اس قیمت مین شامل ہین فرض کرو کہ سات سوین حصی ہین

اول فرض کرو کہ ۷۰۰ء قیمت پانچوین مساوات کی ہی تو اسی یہہ معلوم ہوتا ہے کہ ۳٫۷۲۶۸۷ ٹھیک قیمت اول مساوات کی ہے

دوم فرض کرو کہ ٹھیک قیمت مساوات پنجم کی نہین ہے تو اسی یہہ مستنبط ہوگا کہ ایک مساوات ہے جسکی قیمتین مساوات اول کی قیمتون سی بقدر ۳٫۷۲۶۸۷ کے چھوٹی ہین اور اوسکی قیمت ۰ اور ۱۰ء کے درمیان واقع ہی پس مساوات اول کی قیمت ۳٫۷۲۶۸۷ اور ۳٫۷۲۶۸۸ کے درمیان واقع ہے

پس اسی معلوم ہوتا ہی کہ ایک سلسلہ اوس قسم کی قیمتون کا جسکا ذکر ۲۳۱ مین ہوا اسطرح حاصل ہوتا ہی اور اوس سے حقیقی قیمت یا تقریبی قیمت خاطر خواہ دریافت ہوجاتی ہے

(۲۳۳) ہم نی دفعہ گذشتہ مین یہہ بیان کیا ہی کہ بعض اعداد امتحان سی دریافت ہوتی ہین اب ہم یہان ایک طریقہ ان امتحانون کی ہدایت کی لئی بتلائینگے فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات مفروضہ ہو اور ایک یا زیادہ عملون سی ہم نی ایک مساوات ایسی حاصل کی جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون سی بقدر س کی کم ہون یعنی یہہ فرض کرو کہ ہم مساوات ح (س + لا) = ۰ کی حاصل کرین اور فرض کرو کہ اس مساوات کی ایک قیمت چھوٹی سی ہے تو اس مساوات کی ایک قیمت تقریبی ہوگی

پس اسی معلوم ہوا کہ موافق باب گذشتہ کی اکثر قیمت سی س − $\frac{ح(س)}{ح'(س)}$ اقرب ہوگا پس − $\frac{ح(س)}{ح'(س)}$ اوس عدد کی قدر تقریباً ہوگی جسکو اجزاء عمل کے واسطے ہم تلاش کر رہے ہین

(۲۳۴) مثال فرض کرو کہ ح (لا) = ۲ لا^3 − ۳۷۴ لا^2 − ۲۳۴ لا − ۱۱۷۱ اب امتحان سے معلوم ہوتا ہی کہ ح (۲۰۰) منفی ہی اور ح (۳۰۰) مثبت ہی پس مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت درمیان ۲۰۰ اور ۳۰۰ کے واقع ہی اب ہم وہ عمل کرتی ہین جسی قیمتون

قیمتوں مین سی ہر یک قیمت بقدر ۲۰۰ کے کم ہوجاتی

۲۰۰) ۷۱۱-	۲۳۴-	۴۷۳-	۲
۲۹۶۶۸۰۰-	۱۴۶۰۰-	۴۰۰	
۲۹۶۷۵۱۱-	۱۴۸۳۴-	۷۳-	
	۱۵۴۰۰	۴۰۰	
	۵۰۵۶۶	۳۲۷	
		۴۰۰	
		۷۲۷	

اسی معلوم ہوا کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتوں سی جس مساوات کی قیمتیں بقدر ۲۰۰ کی کم ہین وہ یہہ ہے کہ

۲ لا۳ + ۷۲۷ لا۲ + ۵۰۵۶۶ لا - ۲۹۶۷۵۱۱ = ۰ پس

ح (۲۰۰) = -۲۹۶۷۵۱۱ اور حَ (۲۰۰) = ۵۰۵۶۶

اسی معلوم ہوا کہ - ح (۲۰۰) / حَ (۲۰۰) زیادہ قریب بہ نسبت ۵۰ کی ہی پس اس مساوات کی قیمتوں مین سے ہر یک قیمت کو بقدر ۵۰ کے کم کرتے ہین

۵۰) ۲۹۶۷۵۱۱-	۵۰۵۶۶	۷۲۷
۴۵۹۵۸۰۰	۴۱۳۵۰	۱۰۰
۱۶۲۸۲۸۹	۹۱۹۱۶	۸۲۷

اسطرح سی ہم کو ۵۰ بہت بڑا عدد حاصل ہوا اسواسطی ح (۲۵۰) = ۱۶۲۸۲۸۹ مثبت ہے اور ح (۲۰۰) منفی ہی پس قیمت چہوٹی ۲۵۰ سے ہوئی دفعہ ۲۳۳ کی ہدایت پر چلنی سی اکثر ہم ایک بڑا عدد امتحان کی واسطی تجویز کرینگی اور خاص کر ابتدائی عمل مین تو یہہ ضرور ہوگا اسی طرح کی کیفیت عدد کی جذر نکالنی مین واقع ہوتی ہی کہ ہم ایک بڑا عدد جذر مین تجویز کرتے ہین جسی جذر نہین نکلتا

اب ہم ۴۰ پر امتحان کرینگے

۲۹۶۷۵۱۱-	۵۰۵۶۶	۷۲۷	۲
۳۳۱۳۸۴۰	۳۲۲۸۰	۸۰	
۳۴۶۳۲۹	۸۲۸۴۶	۸۰۷	

پس ۴۰ بہی بہت بڑا ہے کیونکہ ح (۲۴۰) مثبت ہے

اب ہم ۲۳۰ پر امتحان کرتے ہیں

-۲۹۶۷۵۱۱	۵۰۵۶۶	۷۲۷	۲
۲۲۲۵۲۸۰	۲۳۶۱۰	۶۰	
-۷۴۲۲۳۱	۷۴۱۷۶	۷۸۷	
	۲۵۴۱۰	۶۰	
	۹۹۵۸۶	۸۴۷	
		۶۰	
		۹۰۷	

پس ح (۲۳۰) = -۷۴۲۲۳۱ منفی مقدار ہی پس ۲۳۰ ایک مناسب عدد ہے
پس مساوات جسکی قیمتیں مساوات ح (لا) = ۰ کے قیمتوں سے بقدر ۲۳۰ کے کم ہیں
وہ یہہ ہے کہ $۲ لا^{۳} + ۹۰۷ لا^{۲} + ۹۹۵۸۶ لا - ۷۴۲۲۳۱ = ۰$

یہاں حَ (۲۳۰) = ۹۹۵۸۶ پس $- \frac{ح (۲۳۰)}{حَ (۲۳۰)} = ۷$ کے تقریباً
اب مساوات کی قیمتیں بقدر ۷ کے گھٹاتے ہیں

(۷) -۷۴۲۲۳۱	۹۹۵۸۶	۹۰۷	۲
۷۴۲۲۳۱	۶۴۴۷	۱۴	
۰	۱۰۶۰۳۳	۹۲۱	

اسی ثابت ہوتا ہے کہ ح (۲۳۷) = ۰ پس ۲۳۷ ایک قیمت اصل مساوات کی ہے
کل عمل کو اس طرح کیا کرتے ہیں

(۲۳۷) -۷۱۱	-۲۳۴	-۴۷۳	۲
-۲۹۶۶۸۰۰	-۱۴۶۰۰	۴۰۰	
-۲۹۶۷۵۱۱ *	-۱۴۸۳۴	-۷۳	
۲۲۲۵۲۸۰	۶۵۴۰۰	۴۰۰	
-۷۴۲۲۳۱ +	۵۰۵۶۶ *	۳۲۷ *	
۷۴۲۲۳۱	۲۳۶۱۰	۴۰۰	
	۷۴۱۷۶	۷۲۷	
	۲۵۴۱۰	۶۰	
	۹۹۵۸۶	۷۸۷	
	۶۴۴۷	۶۰	
	۱۰۶۰۳۳	۸۴۷	
		۶۰	
		۹۰۷	
		۱۴	
		۹۲۱	

جہاں ن * کیا گیا ہے وہان پہلا جز عمل کا ختم ہوتا ہی اور جہاں نشان ‡ ہی وہان دوسرا جز عمل کا تمام ہوتا ہے

(۲۳۵) اب ہم مثال ایک ایسی مساوات کی لکھتی ہین کہ جسکی قیمت ناطقہ محدودہ نہین ہی فرض کرو کہ

ح (لا) = لا^۳ − ۳ لا^۲ − ۲ لا + ۵ امتحان سی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ح (۳) منفی اور

ح (۴) مثبت ہی پس مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ۴ اور ۳ کے درمیان ہے

پس عمل اس قیمت کی تقریب کا تین مرتبہ کی اعشاریہ تک یہہ ہوگا

۱	−۳	−۲	۵	) ۳٫۱۲۸
	۳	۰	−۶	
	۰	−۲	−۱ *	
	۳	۹	٫۷۶۱	
	۳	۷ *	−٫۲۳۹	
	۳	٫۶۱	٫۱۶۷۱۲۸	
	۶ *	۷٫۶۱	−٫۰۶۱۸۷۲ ‡	
	٫۱	٫۶۲	٫۰۶۸۲۷۳۱۵۲	
	۶٫۱	۸٫۲۳ +	−٫۰۰۳۵۹۸۸۴۸	
	۶٫۲	٫۱۲۶۴		
	۶٫۳ +	۸٫۳۵۶۴		
	٫۰۲	٫۱۲۶۸		
	۶٫۳۲	۸٫۴۸۳۲ ‡		
	٫۰۲	٫۰۵۰۹۴۴		
	۶٫۳۴	۸٫۵۳۴۱۴۴		
	٫۰۲	٫۰۵۱۰۰۸		
	۶٫۳۶ ‡	۸٫۵۸۵۱۵۲		
	٫۰۰۸			
	۶٫۳۶۸			
	٫۰۰۸			
	۶٫۳۷۶			
	٫۰۰۸			
	۶٫۳۸۴			

اب قیمت کے دوسرے ہندسہ کے دریافت کرنے کے واسطے − ۱/۶ ہم کو حاصل ہے

پس ۱ سب سی زیادہ قریب عدد امتحان کرنی کی لئی ہی اور قیمت کے تیسرے ہندسہ کے دریافت کرنی کی واسطے

− ٫۲۳۹/۸٫۲۳ ہی پس ٫۰۲ سب سے زیادہ عدد قریب امتحان کے واسطے ہے

اور قیمت کی چوتھی ہندسہ کی دریافت کرنی کی واسطی − ٫۰۶۱۸۷۲/۸٫۴۸۳۲ ہم کو حاصل ہوتا ہے

پس ٫۰۰۸ سب سی زیادہ قریب عدد امتحان کی واسطی ہی ان سب صورتون مین جس عدد کو

بیان کیا ہے وہ درست بیٹھتا ہے

(۲۳۶) دفعہ گذشتہ مین جو مساوات لکھی ہی اوسکو دوسری مثال سمجھو اور اوسکی قیمت ۱ اور ۲ کے درمیان دریافت کرو

۱ | ۳۰-
۱
۲۹
۱
۱-
۱
۰۰ *
۲
۲
۲
۴
۲
۶۰۰
۱
۶۰۱
۱
۶۰۲
۱
۶۰۳۰ †
۶
۶۰۳۶
۶
۶۰۴۲
۶
۶۰۴۸

۲۰-
۲-
۴-
۱-
۵۰۰- *
۴
۴۹۶-
۸
۴۸۸۰۰۰۰- ×
۶۰۱
۴۸۷۹۳۹۹-
۶۰۲
۴۸۷۸۷۹۷۰۰ †
۳۶۲۱۶
۴۸۷۸۴۳۴۸۴-
۳۶۲۵۲
۴۸۷۸۷۲۳۲-

۱٫۲۰۱۶) ۵
۴-
۱۰۰۰ *
۹۹۶-
۸۰۰۰۰۰۰
۴۸۷۹۳۹۹-
۳۱۲۰۶۰۱۰۰۰ +
۲۹۲۷۰۶۰۹۰۴-
۱۹۳۵۴۰۰۹۶

اس دفعہ اور دفعہ ۲۳۵ کی ترتیب مین فرق اس بات سی پیدا ہوتا ہے کہ عمل مین یہہ اکثر دستور ہی کہ علامت اعشاریہ کی ساقط اوسطرح کر دیتی ہین جسطرح کہ اعداد کی تقریبی جذر کی نکالنی مین قیمت مین جو جزو اعشاریہ ہوا اوسکی واسطی یہہ قاعدہ کافی ہی کہ جب تمام ہندسی صحیح عدد کے قیمت مین معلوم ہوجائین اور کسر اعشاریہ کے پیدا ہونے کی نوبت پہونچی تو وہان عمل کی اول خانہ مین دائین طرف ایک صفر لگاؤ اور عمل کے دوسرے خانہ مین دو صفر اور تیسرے خانہ مین تین صفر اور علی ہذا القیاس اگر اور خانی عمل کی تین سے

زائد ہون اور پہر عمل ایک دفعہ کا اسطرح کرو کہ گویا سب یہی ہندسی قیمت کی اعداد صحاح ہی تہی اور
پہر صفرون کا الحاق موافق سابق کی عمل مین لاؤ

اب اس بات پر غور کرو کہ قیمت مین جب ۲ نکل چکی بعد اوسکی جو ہندسہ مثل صحیح کی تقریباً تجویز ہوگا وہ
$-\frac{۰۰۰۸}{۴۸۸۰۰}$ ہی اور یہہ ایک سی کم ہی پس ایک صفر قیمت مین لگاؤ اور اول خانہ عمل مین ایک
صفر اور دو اور زیادہ صفر دوسرے خانہ عمل مین اور تین اور زیادہ تیسرے مین الحاق کرو
اور عمل موافق سابق کی کرو

یہہ امر ظاہر ہی کہ امثلہ گذشتہ مین اول خانہ مین عمل کا اختصار ہوسکتا تہا کیونکہ یہہ کافی تہا
کہ جو نتایج عمل ہون اونکو لکہین اور درمیان عمل کو ذہن مین کرین مگر ہم نی صاف صاف سمجہانی
کے واسطی کل عمل کی صورت مفصل لکہی ہی لیکن اوسکا اختصار نہین کیا

(۲۳۷) جب قیمت مین بعض ہندسی نکل اوین تو عمل مختصر کی اعانت سی اور ہندسی قیمت کی دریافت
ہوجاتے ہین اس کی مثال مساوات $لا^۳ + ۳لا^۲ - ۲لا - ۵ = ۰$ کی مثبت قیمتون کے دریافت کرنی مین دیتی ہین
قیمت مین پانچ مرتبی اعشریہ کی جب تک ہم کو دریافت ہونگی عمل تمام اور کمال کرینگی .

۱٫۳۳۰۰۵ (	۵−	۲−	۳	۱
	۲	۴	۱	
	۳۰۰۰−	۲	۴	
	۲۶۶۷	۵	۱	
	۳۳۳۰۰۰−	۷۰۰	۵	
	۳۳۲۳۳۷	۱۸۹	۱	
	۶۶۳۰۰۰۰۰۰−	۸۸۹	۶۰	
	۵۶۴۳۵۲۵۱۲۵	۱۹۸	۳	
	۹۸۶۴۷۶۲۴۸۷۵−	۱۰۸۷۰۰	۶۳	
		۲۰۷۹	۳	
		۱۱۰۷۷۹	۶۶	
		۲۰۸۸	۳	
		۱۱۲۸۶۷۰۰۰۰۰۰	۶۹۰	
		۳۴۹۵۰۲۵	۳	
		۱۱۲۸۷۰۴۹۵۰۲۵	۶۹۳	
		۳۴۹۵۰۵۰	۳	
		۱۱۲۸۷۳۹۹۰۰۷۱	۶۹۶	
			۳	
			۶۹۹۰۰۵	

۶۹۹۰۰۵
۵
۶۹۹۰۱۰
۵
۶۹۹۰۱۵

اختصار عمل کا قاعدہ یہہ ہی کہ ہر دفعہ کی عمل مین ایک ہندسہ عمل کی اخر خانہ مین اول سی دور کرو مگر ایک اور اخر خانہ عمل مین سی دو ہندسی مگر دو اور علی ہذا القیاس

اب وہی مثال لیتی ہین جو اوپر بیان ہوئی اور اس مختصر قاعدہ کو عمل مین لاتی ہین

۱ ۶۹۹۰۱۵ ۱۱۲۸۷۳۹۹۰۰۷۵ — ۹۸۶۴۷۵۲۴۸۷۵ (۱۶۳۳۰۰۵۸۷۳

۵۵۹۲۱ ۹۰۲۹۹۶۳۹۴۳۲
۱۱۲۸۷۴۵۴۹۲۹ * ۸۳۴۷۸۸۵۴۴۳ —
۵۵۹۲۱ ۷۹۰۱۲۶۱۰۱۸
* ۱۱۲۸۷۵۱۰۸۵۰ — ۴۴۶۶۲۴۴۲۵
۴۸۹ ۳۳۸۶۲۵۶۲۴
۱۱۲۸۷۵۱۵۷۴ — ۱۰۷۹۹۸۸۰۱
۴۸۹
۱۱۲۸۷۵۲۰۶۳
۲
۱۱۲۸۷۵۲۰۸
۲
۱۱۸۷۵۲۱۰

اوس مقام پر جہان پورا عمل ختم ہوتا ہی ہندسہ اخری ۸ تجویز ہوا ہی اب ہم ۵ کو اخر خانہ عمل کے اغاز سی
ساقط کرتی ہین الا ایک اور ۱۵ اخر خانہ عمل کے اغاز سی لقط کرتی ہین الا دو اول مرتبہ مین اجزا عمل کی ۶۹۹
کو ۸ مین ضرب دی اور حاصل ضرب کو عمل کی خانہ اخری مین لکہا حاصل ضرب ۵۵۹۲۱ سمجہا گیا ہی اسلئی کہ
۶۹۹۰۱ کو ۸ مین ضرب دی ہی اور اول ہندسہ کو الگ کر لیا ہی پس ۵۵۹۲۱ نسبت اصل قیمت کے
۵۵۹۲۰ سی زیادہ قریب ہی پس ۵۵۹۲۱ کو ۱۱۲۸۷۳۹۹۰۰۷ میں زیادہ کر
اکائی کی مرتبہ کا ہندسہ ہم نی ۹ لکہا ہی اسلئی کہ ہم نی پانچ کے ساقط کرنے کی رعایت
رکہی ہی ان * سی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اول مرحلہ عمل مختصر کا یہان ختم ہوا ہی اب ۰ کو دوسری خانہ
عمل سی ساقط کرو اور ۹ اول خانہ عمل سی تو اول خانہ عمل مین مختصر ہو کر ۶۹ رہ جائینگے

اب ہندسہ آخری قیمت کا ۷ ہی اور مرحلہ عمل کا وہان ختم ہوتا ہی جہان پہلہ نشان ہے
اب ۳ کو دوسرے خانہ عمل مین سی ساقط کرو اور ۴۹ کو اول خانہ عمل مین سی تو اول خانہ عمل نابود
ہوجایگا مگر پہر بہی کچہہ اثر قیمت کی ہندسہ آخری ۳ پر کری گا اور جب ۴۹ کو ۳ مین ضرب دین
اور دو ہندسی ساقط کرین تو ۲ باقی رہینگے

اب دو خانہ عمل کی باقی رہی ہین اور باقی عمل کی بالکل مطابق تقسیم مختصر کی قاعدہ معمولی کی ہی
اور اوسی اٹہہ ہندسی اور قیمت مین مستنبط ہونگے

۱۰۳۳۳۰۰۵۸۷۳۹۵۹۷۹۲۵)	۱۰۷۹۹۸۸۰۱ −	۱۱۲۸۷۵۲ و۱۰
	۱۰۱۵۸۷۴۸۹	
	۴۴۱۱۱۱۲ −	۱۱۲۸۷۵۲ و۱
	۵۴۴۳۷۶۱	۱۱۲۸۷۵و۲
	۷۶۷۳۵۱ −	
	۶۶۷۲۵۱	۱۱۲۸۷و۵
	۹۰۱۰۰ −	
	۷۹۰۱۳	۱۱۲۸و۷
	۱۱۰۸۷ −	
	۱۰۱۵۸	۱۱۲و۸
	۹۲۹ −	
	۹۰۲	۱۱و۲
	۲۷ −	
	۲۲	۱و۱
	۵ −	

اس تقریب پر اعتبار آخر ہندسہ تک ہوسکتا ہی اور کم از کم درجہ اس اعتبار کا یہہ ہے کہ آخر ہندسہ کو صحیح خیال کر دین
اسواسطی کہ اگر کل عمل تمام و کمال کیا جاتا تو آخر خانہ عمل مین بہت سی ہندسی اون ہندسون
کی دائین طرف ہوتی جواب لکہی ہوئی ہین مگر وہ ہندسی جواب لکہی گئے ہین تو اوسکی مقامات
مین کچہہ تغیر نہین واقع ہوگا لیکن شاید تغیر ہو تو فقط اتنا ہوگا کہ بعض سطرون کے آخر ہندسہ مین
دوسری سطر کے آخر ہندسی سے بقدر ایک کے فرق رہے

(۲۳۸) دفعہ گذشتہ مین جو قیمت دریافت ہوئی ہی وہ مساوات لا^{۳} − ۳لا^{۲} − ۲لا + ۵ = ۰
منفی قیمت کی قدر عددی ہی پس اسی معلوم ہوا کہ دفعات ۲۳۵ اور ۲۳۶ مین جو قیمتین دریافت ہوئین

وہ دفعہ ۲۳۷ کے دریافت شدہ قیمتون سی لقدر ۳ کے زیادہ ہون کیونکہ مساوات کی تینون قیمتین مع اپنی مناسب علامتون کی ملکر برابر ۳ کے ہین

اگر تینون قیمتون کو تقریباً دریافت کرکی جمع کرینگے تو اوسکا مجموعہ بہی تقریباً ۳ ہوگا طالب علم کو چاہیی کہ وہ دو تقریبی مثبت قیمتون مین بہت سی مراتب اعشاریہ کی نکالی تاکہ ان دو قیمتون اور دفعہ ۲۳۷ سی جو قیمت دریافت ہوا اونکی مجموعہ مین تعلق صاف ثابت ہو

(۲۳۹) ہورنر صاحب کی ترکیب مین جو مشقت شاقہ اٹہانی پڑتی ہی اوسکی واسطی بہت سی مہندسین نی اپنی رائی دی ہی اون رائی مین ایک رائے ہم یہہ نقل کرتی ہین کہ چونکہ یہہ عمل ایسا ہے کہ جسکو اکثر آدمی نہین کرسکتی اسلئی اوسکا اختصار بہی کسی کام کا نہین ہی جتنی قاعدی اور مختصر بنانی کی بیان ہوئی ہین اون سب مین محاسب اوس ترکیب کی یکرنگی کو بہولتا ہے اور یہہ مختصر قاعدہ محاسب کے امداد نہین کرتی بلکہ اوس خود ترکیب ہی کو بہولاتی ہین

(۲۴۰) دفعہ ۲۳۱ مین ہم نی بیان کیا تہا کہ ہورنر صاحب کی ترکیب بواسطہ ح (لا + ط) بنانی کی علی العموم درست اور صحیح ہی اب اس بات کو ثابت کرتی ہین

فرض کرو کہ $\text{ح}(\text{لا}) = \text{ع}_0\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ع}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}-1}\,\text{لا} + \text{ع}_{\text{ن}}$

لا کی جگہ ی + ط لکہو تو ح (لا) یہہ ہوجائیگا کہ

$$\text{ق}_0\,\text{ی}^{\text{ن}} + \text{ق}_1\,\text{ی}^{\text{ن}-1} + \text{ق}_2\,\text{ی}^{\text{ن}-2} + \cdots \text{ق}_{\text{ن}-1}\,\text{ی} + \text{ق}_{\text{ن}}$$

اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ $\text{ق}_{\text{ن}}$ اور $\text{ق}_{\text{ن}-1} \cdots \text{ق}_1$ و ق_0 ہورنر صاحب کے عمل سی دریافت ہوجائینگے اب یہہ ظاہر ہی کہ $\text{ق}_0 = \text{ع}_0$ چونکہ $\text{ی} = \text{لا} - \text{ط}$ تو یہہ جملے تطابق کے سبب سے آپسمین برابر ہونگے

$$\text{ع}_0\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ع}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-2} \cdots \text{ع}_{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ع}_{\text{ن}}$$

اور $\text{ق}_0(\text{لا}-\text{ط})^{\text{ن}} + \text{ق}_1(\text{لا}-\text{ط})^{\text{ن}-1} + \text{ق}_2(\text{لا}-\text{ط})^{\text{ن}-2} \cdots \text{ق}_{\text{ن}-1}(\text{لا}-\text{ط}) + \text{ق}_{\text{ن}}$

اسیواسطی جب ح (لا) کو لا − ط پر تقسیم کرینگے تو باقی $\text{ق}_{\text{ن}}$ رہیگی اور خارج قسمت پیدا ہوگا

وہ تطابق کی حیثیت سے برابر

ق. (لا - ط)^(ن-۱) + ق۱ (لا - ط)^(ن-۲) + ق۲ (لا - ط)^(ن-۳) + ق۳ (لا - ط)^(ن-۴) + ... + ق ن-۱

ہوگا اب اخر جملہ کو جب لا - ط پر تقسیم کرینگے تو باقی ق ن-۱ بچیگی اور خارج قسمت جو پیدا ہوگا وہ تطابق کی حیثیت سے برابر

ق. (لا - ط)^(ن-۲) + ق۱ (لا - ط)^(ن-۳) + ق۲ (لا - ط)^(ن-۴) + ... ق ن-۲

ہوگا اب اخر جملہ کو جب لا - ط پر تقسیم کرینگے تو باقی ق ن-۲ بچیگی اور خارج قسمت جو پیدا ہوگا وہ تطابق کی حیثیت سی برابر

ق. (لا - ط)^(ن-۳) + ق۱ (لا - ط)^(ن-۴) + ق۲ (لا - ط)^(ن-۵) + ... + ق ن-۳

ہوگا اور علے ہذا القیاس

پس ق ن و ق ن-۱ و ق ن-۲ و ق ن-۳ ... متواتر باقیات ح (لا) کو لا - ط پر تقسیم کرنی سی اور پہر خارج قسمت جو پیدا ہو اوسکو لا - ط پر تقسیم کرنی سی اور پہر خارج قسمت جدید کو لا - ط پر تقسیم کرنیسے حاصل ہوتی ہین اور بموجب دفعات ۵، ۷ و ۹ کی ہم کو یہہ معلوم ہوتا ہے کہ ہورنر صاحب کی عمل سی یہہ باقیات متواترہ متعین ہوتی ہین

(۲۴۱) معادلات کی حقیقی قیمتوں کے تقریباً دریافت کرنی کی بحث ہم نی کافی اور وافی لکہی ہی مگر ابتک کوئی اسان ترکیب عملی مساواتوں کی خیالی قیمتوں کے دریافت کرنی کی نہیں ایجاد ہوئی مگر ہان ایک ترکیب نظری ایسی ہے کہ وہ موقوف اوس ترکیب کے ہے جو ابہی بیان ہوئی دلیل اسکی یہہ ہی کہ فرض کرو ط + ص √-۱ مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ہی پس اس سبب سی کہ ح (ط + ص √-۱) کا جزو حقیقی اور جزو خیالی جدا جدا معدوم ہونا چاہیی اسواسطی ہم کو دو نتیجے حاصل ہونگے اونکو

ع = ۰ اور ق = ۰ سی مثل دفعہ ۱۸۱ کے تعبیر کرد

یہاں ع اور ق قیمتین ط اور ص کی ہونگے اور اگر ہم ط یا ص کو مساوات ع = ۰ اور ق = ۰ سی خارج کرین اور ایک مساوات ایک مجہول کی دریافت کرین تو اس مساوات

کہ ہم کو اصلی قیمتین دریافت کرنی مطلوب ہون لیکن اسی معلوم ہوا کہ مساوات معلوم کی ہم ناممکن قیمتین اسطرح دریافت کرسکتی ہین کہ ایک اور خاص مساوات بنائین اور اوسکی اصل قیمتین دریافت کرین اینده ہم ثابت کرینگے کہ ان دو مجہول کی مساوانون مین سی ایک مجہول کو دور کرکی کسطرح ایک مجہول کی مساوات بنانی مین اکیسوین باب مین معادلات کی ناممکن قیمتون کی دریافت کرنی کی ایک اور ترکیب لکھینگی طالب علم کو چاہیی کہ وہ رتہر فورد کی اوس مضمون کو دیکھی جسمین اونہون نی اعدادی مساواتون کی حل کرنی کی ترکیب کامل بیان کی

اونیسوان باب قیمتون کی بالقرینہ جملی

(۲۴۲) ایک جملہ دو یا زیادہ مقدارون کا بالقرینہ اون مقادیر کے لحاظ سی کہلاتا ہے جو اوسمین اسطرح واقع ہون کہ اگر اونمین سی دو دو مین تبادل ہو تو جملہ نہ متبدل ہو

مثلاً $ا^2 + ب^2 + س^2$ جملہ بالقرینہ تین مقادیر ا و ب و س کا ہے

اور نیز اب + ب س + ح ایسی جملہ بالقرینہ اونہین مقادیر کا ہی اسواسطے کہ اگر ا اور ب اور س مین دو دو کے اندر تبادل ہو تو جملہ متبدل نہین ہوتا

(۲۴۳) مساوات کی امثال جملی بالقرینہ اوسکی قیمتون کی ہوتے ہین

اسواسطی کہ بموجب دفعہ ۴۵ کے مساوات $لا^{ن} + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} \ldots = 0$ مین

$-ع_1$ = مجموعہ قیمتون کے

$ع_2$ = دو دو قیمتون کی حاصل ضربون کے مجموعہ کے

اور علی ہذا القیاس اور یہہ امر ظاہر ہی کہ جو جملی قیمتون کی یہان واقع ہوتی ہین جملے بالقرینہ ہوتے ہین

اس باب کا مطلب اعظم یہہ ہی کہ ہم یہہ ثابت کرین کہ ہر ایک جملہ بالقرینہ ناطقہ مساوات کی قیمتون کا مساوات کی امثال کی رقمون مین بیان ہوسکتا ہی اب ہم آغاز اس مطلب کا نیوٹن صاحب کی اوس ضابطہ سی کرتی ہین جو مساوات کی قیمتون کی قوا کے جمع کرنے کے باب مین ہے

(۲۴۴) فرض کرو کہ $لا^{ن} + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} + \ldots + ع_{ن}$ کو ح (لا)

تعبیر کرتا ہی اور ا و ب و س اور مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتوں کو تعبیر کرتے ہین

فرض کرو کہ $\text{ص}_1 = \text{ا} + \text{ب} + \text{س} + \text{د} \dots$

$$\text{ص}_2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{س}^2 + \text{د}^2 + \dots$$

$$\text{ص}_3 = \text{ا}^3 + \text{ب}^3 + \text{س}^3 + \text{د}^3 + \dots$$

اور علی ہذا القیاس ص_1 مجموعہ قیمتوں کا ہی اور ص_2 مجموعہ قیمتوں کے مجذوروں کا ہے اور ص_3 مجموعہ قیمتوں کی مکعبوں کا ہی غرض بالعموم $\text{ص}_\text{م}$ مجموعہ قیمتوں کے م قوتوں کا ہے

بموجب دفعہ ۴۷ کے

$$\text{ح}'(\text{لا}) = \frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}-\text{ا}} + \frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}-\text{ب}} + \frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}-\text{س}} + \dots$$

اس مطابقہ کی بائین طرف جو تقسیمین لکھی ہین وہ بموجب دفعہ ۷ کی ٹھیک ٹھیک ہوسکتی ہین اور ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}-\text{ا}} = \text{لا}^{\text{ن}-1} + (\text{ا}+\text{ع}_1)\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + (\text{ا}^2+\text{ع}_1\text{ا}+\text{ع}_2)\,\text{لا}^{\text{ن}-3} + \dots$$
$$+ (\text{ا}^\text{م} + \text{ع}_1\text{ا}^{\text{م}-1} + \text{ع}_2\text{ا}^{\text{م}-2} \dots)\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{م}-1} + \dots$$

اور اسی کی متماثل جملی $\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}-\text{ب}}$ اور $\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}-\text{س}}$ ... حاصل ہونگی اور جمع کرنی سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{ح}'(\text{لا}) = \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + (\text{ص}_1 + \text{ن}\,\text{ع}_1)\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + (\text{ص}_2 + \text{ع}_1\text{ص}_1 + \text{ن}\,\text{ع}_2)\,\text{لا}^{\text{ن}-3}$$
$$+ (\text{ص}_\text{م} + \text{ع}_1\text{ص}_{\text{م}-1} + \text{ع}_2\text{ص}_{\text{م}-2} + \dots + \text{ن}\,\text{ع}_\text{م})\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{م}-1}$$

اور نیز $\text{ح}'(\text{لا}) = \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + (\text{ن}-1)\,\text{ع}_1\text{لا}^{\text{ن}-2} + (\text{ن}-2)\,\text{ع}_2\text{لا}^{\text{ن}-3} + \dots$

$$+ (\text{ن}-\text{م})\,\text{ع}_\text{م}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{م}-1} + \dots$$

اس مطابقہ مین امثال لا کی یکسان قوا کے برابر لکھو تو

$$\text{ص}_1 + \text{ن}\,\text{ع}_1 = (\text{ن}-1)\,\text{ع}_1 \quad \text{یا} \quad \text{ص}_1 + \text{ع}_1 = 0$$

$$\text{ص}_2 + \text{ع}_1\text{ص}_1 + \text{ن}\,\text{ع}_2 = (\text{ن}-2)\,\text{ع}_2 \quad \text{یا} \quad \text{ص}_2 + \text{ع}_1\text{ص}_1 + 2\text{ع}_2 = 0$$

اور علی العموم

$$\text{ص}_\text{م} + \text{ع}_1\text{ص}_{\text{م}-1} + \text{ع}_2\text{ص}_{\text{م}-2} + \dots + \text{ن}\,\text{ع}_\text{م} = (\text{ن}-\text{م})\,\text{ع}_\text{م}$$

یعنی $\text{ص}_{\text{م}} + \text{ع}_1 \text{ص}_{\text{م}-1} + \text{ع}_2 \text{ص}_{\text{م}-2} + \cdots + \text{ع}_{\text{م}-1} \text{ص}_1 + \text{م ع}_{\text{م}} = 0$

اس نتیجہ عامہ مین م بہ نسبت ن کے چہوٹا فرض کیا گیا ہے

اس نتیجہ عامہ کی وساطت سی ہم مجموعہ قیمتون کی م وین قوت کا امثال اور قیمتون کے ادنی درجہ کے قوتون کی رقمون مین بیان کرسکتی ہین اور اسی عمل کو مکرر سہ کرر کرنی سی ہم قیمتون کی م وین قوتون کے مجموعہ کو امثال کی رقمون مین بیان کرسکتی ہین

اب فرض کرو کہ م کی ساتہہ ن سی چہوٹی ہونی کی قید جاتی رہی مساوات معلوم ح (لا) = ۰ کی لا$^{\text{م}-\text{ن}}$ مین ضرب دو تو لا$^{\text{م}-\text{ن}}$ ح (لا) = ۰ یعنی

$$\text{لا}^{\text{م}} + \text{ع}_1 \text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ع}_2 \text{لا}^{\text{م}-2} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}} \text{لا}^{\text{م}-\text{ن}} = 0$$

کی جگہ متواتر قیمتین ا و ب و س . . . رکہو اور ماحصل کو جمع کرو تو اسطرح

$$\text{ص}_{\text{م}} + \text{ع}_1 \text{ص}_{\text{م}-1} + \text{ع}_2 \text{ص}_{\text{م}-2} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}} \text{ص}_{\text{م}-\text{ن}} = 0$$

اس مسئلہ سی ہم مساوات کی قیمتون کی م وین قوتون کی مجموعہ کو امثال مساوات اور قیمتون کی ادنی قوتون کی رقمون مین اوس حالت مین کہ م بہ نسبت ن سی ہو بیان کرسکتی ہین اور اسی عمل کو مکرر سہ کرر کرنی سی مساوات کی قیمتون کی م قوتون کو جمع کر سکتے ہین

(۲۴۵) مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتون کی منفی قوتون کی مجموعہ کو دریافت کرو

لا کی جگہ $\frac{1}{\text{لا}}$ رکہو اور اس بدلی ہوئی مساوات مین قیمتون کی مثبت قوتون کے مجموعہ کو معلوم کرو یا دفعہ گذشتہ کی اخر نتیجہ مین م کو متواتر برابر ن - ۱ اور ن - ۲ اور ن - ۳ . . . کے بناؤ تو اوسی متواتر ص_{-1} و ص_{-2} و ص_{-3} . . . حاصل ہونگے

(۲۴۶) جملہ بالقرینہ ناطقہ کی قیمت دریافت کرنی کی سوال عامہ کی صورت اس سوال کے صورت مین مبتدل ہو جائیگی کہ خاص مفرد جملون کی قیمت دریافت کرو اور اب ہم اس کو ثابت کردینگی

کوئی جملہ بالقرینہ ناطقہ اگر صحیح نہ ہو تو وہ خارج قسمت ہوگا جو ایک جملہ بالقرینہ ناطقہ صحیحہ کو دوسرے جملہ بالقرینہ ناطقہ صحیحہ پر تقسیم کرنی سی پیدا ہوا ہو کوئی سا جملہ بالقرینہ ناطقہ صحیحہ اگر متجانس

نہ ہو تو وہ دو یا زیادہ جملے بالقرینہ ناطقہ صحیحہ کا مجموعہ ہوگا پس اسی معلوم ہوا کہ فقط بحث متجانسہ جملوں ہی پر چاہیے ایک جملہ متجانسہ مرکب مختلف اجزا سے ہو سکتا ہی جسمیں گو مجموعہ قوت نماؤن کا ایک ہی رہی مگر وہ خود قوت نما مختلف ہوں ایسی صورت مین جملہ متجانسہ مجموعہ دو یا زیادہ اوس متجانسہ جملوں کا ہی جو متحد الدرجہ ہین اور اون مین سب رقموں مین ایک ہی قوت نما ہے اسی معلوم ہوا کہ فقط اون ہی جملوں بالقرینہ ناطقہ متجانسہ پر کرنی چاہیئے جنمین تمام رقموں مین قوت نما ایک ہی ہین

(۲۴۷) فرض کرو کہ ا و ب و س اور د . . مساوات معلوم کی قیمتوں کو تعبیر کرتے ہین بموجب دفعہ ۲۴۴ کے ہم امثال کے رقموں مین قیمت

ا^م + ب^ا + س^ا + د^ا . . .

کی قیمت بیان کر سکتی ہین اس جملہ کو اول رتبہ کا جملہ کہتی ہین کیونکہ اوسکی ہر ایک رقم مین ایک قیمت مساوات کی قیمتوں مین سے ہے

جب جملہ کی ہر رقم مین قیمتون مین سی دو دو ملحق ہو تو اوسکو دوسرے رتبہ کا جملہ کہتی ہین جیسی یہ جملہ

ا^م ص^ع + ا^م س^ع + ص^م س^ع + . . .

اب یہان ترتیب قیمتون مین سی دو دو کی لی گئی ہی اور قوت نما م اول قیمت پر اور ع قوت نما دوسری قیمت پر رکھا گیا ہی اب اس جملہ کو ہم مج ا^م ب^ع سے تعبیر کرینگے کیونکہ وہ حاصل جمع ہے ایسی رقموں کا جیسی کہ رقم ا^م ب^ع ہی جب قیمتون مین سی تین تین قیمتین جملہ مین ملحق ہوں تو اوس جملہ کو تیسری رتبہ کا جملہ کہتی ہین جیسی کہ یہہ جملہ ہے

ا^م ب^ع س^ق + ا^م ب^ع د^ق + ا^م ب^ع د^ق + . .

یہان ترتیب قیمتون مین سی تین تین کی ایک دفعہ لی گئی ہی اور م اول قیمت پر اور ع دوسرے قیمت پر اور ق تیسرے قیمت پر رکھا گیا ہی ہم اس جملہ کو مج ا^م ب^ع س^ق سی تعبیر کرینگی کیونکہ وہ حاصل جمع ایسی رقموں کا ہے جیسی کہ ا^م ب^ع س^ق کا ہے

اور اسیطرح سی چوتھی اور زیادہ رتبی کی جملی ہم معتبر کر سکتی ہین اور اسی طریقہ سی اونکی کتابت کر سکتی ہین
چونکہ ہم نی یہہ بتلا دیا ہی کہ $\text{ص}_{\text{م}}$ سی کسطرح جملہ کو مثال مساوات کی رقموں مین بیان کر سکتی ہین
تو صرف یہہ بتلا دینا کافی ہوگا کہ ہم جن جملوں پر بحث کر رہی ہین اونمین سی کوئی ایسی جملوں
کی رقموں مین جیسی $\text{ص}_{\text{م}}$ ہی کسطرح بیان ہو سکتا ہے

(۲۴۸) دوسرے رتبہ کی $\text{ح ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}}$ جملہ بالقرینہ کی قیمت دریافت کرو

ہم کو معلوم ہی کہ $\text{ص}_{\text{م}} = \text{ا}^{\text{م}} + \text{ب}^{\text{م}} + \text{س}^{\text{م}} + \dots$

$$\text{ص}_{\text{ع}} = \text{ا}^{\text{ع}} + \text{ب}^{\text{ع}} + \text{س}^{\text{ع}} + \dots$$

ضرب دینی سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ص}_{\text{م}}\text{ص}_{\text{ع}} = \text{ا}^{\text{م+ع}} + \text{ب}^{\text{م+ع}} + \text{س}^{\text{م+ع}} + \dots$$
$$+ \text{ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}} + \text{ا}^{\text{م}}\text{س}^{\text{ع}} + \text{ب}^{\text{م}}\text{ا}^{\text{ع}} + \dots$$

یعنی $\text{ص}_{\text{م}}\text{ص}_{\text{ع}} = \text{ص}_{\text{م+ع}} + \text{ح ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}}$

اسیواسطی $\text{ح ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}} = \text{ص}_{\text{م}}\text{ص}_{\text{ع}} - \text{ص}_{\text{م+ع}}$

اسمین م اور ن غیر مساوی فرض کئی گئی ہین اگر ہم ع کو برابر م کے فرض کرین تو
$\text{ح ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}}$ مین دو دو رقمین برابر ہو جائینگی اور یہہ حاصل جمع اسطرح بیان کیا جایگا کہ
$\text{۲ ح (ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{م}}\text{)}$ اور اسیواسطی

$$\text{۲ ح (ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{م}}\text{)} = \text{ص}_{\text{م}}^{\text{۲}} - \text{ص}_{\text{۲م}}$$

(۲۴۹) تیسری رتبہ کی جملہ بالقرینہ $\text{ح ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}}\text{س}^{\text{ق}}$ کی قیمت دریافت کرو

ہم کو معلوم ہی کہ $\text{ح ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}} = \text{ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}} + \text{ب}^{\text{م}}\text{س}^{\text{ع}} + \text{ا}^{\text{م}}\text{س}^{\text{ع}} + \dots$

$$\text{ص}_{\text{ق}} = \text{ا}^{\text{ق}} + \text{ب}^{\text{ق}} + \text{س}^{\text{ق}}$$

ضرب دینی سی یہہ ہم کو حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ص}_{\text{ق}}\text{ح ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{ع}} = \text{ا}^{\text{م+ق}}\text{ب}^{\text{ع}} + \text{ب}^{\text{م+ق}}\text{س}^{\text{ع}} + \text{س}^{\text{م+ق}}\text{ا}^{\text{ع}} + \dots$$

+ ا م ب ع + ق + ح س ع + ق + س ک ا ع + ن

+ ا ا ع س ق + ...

اب یہاں بائین طرف کی ارقام مین تین صنف ہین جو موافق ہماری طریقہ کتابت کی اسطرح تعبیر ہوتے ہین

ح ا م + ق ب ع و ح ا ع + ق ب ا و ح ا م ب ع س ق پس

ص ن ح ا م ب ع = ح ا م + ق ب ع + ح ا ع + ق ب ا + ح ا م ب ع س ق

دفعہ ٢٤٨ کی موافق جو قیمتیں ح ا م ب ع اور ح ا م + ق ب ع اور ح ا ع + ق ب م کی دریافت

ہون اونکو ان کی جگہ رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ح ا م ب ع س ق = ص م ص ع ص ق − ص م ص ع + ص ق − ص م + ص ع ص ع − ص ع + ق ص م + ٢ ص م + ع + ق

ہم نے م اور ع اور ق کو غیر مساوی فرض کیا ہی لیکن فرض کرو کہ م = ع تو بموجب دفعہ ٢٤٨ کی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

٢ ح (ا ب ا) س ق = ص ا م ص ق − ص ٢ م ص ق − ٢ ص م ص م + ٢ ص ٢ م + ق

اگر م = ع = ق تو مجموعہ ح ا م ب ع س ق کا متبدل اور مختصر ہوکر ٢٠٣ ح (ا ب س) م ہوگا پس

٦ ح (ا ب س) م = ص ٣ م − ٣ ص ٢ م ص م + ٢ ص ٣ م

اس دفعہ اور دفعہ گذشتہ کی ترکیب جہانتک چاہین جاری رکہین اور اوس سی ہم کو ہر رتبہ کا جملہ جو

ح ا م ب ع اور ح ا م ب ع س ق صورت کا ہو امثال کی رقموں مین بیان ہوجائیگا

پس بموجب دفعہ ٢٤٦ کے جو اس باب کا مطلب ہی وہ حاصل ہوجائیگا

(٢٥٠) ہم نے یہہ بتلا دیا ہی کہ جو جملہ ص م سی تعبیر ہو وہ امثال کی رقموں مین کس طرح بیان ہوسکتا ہی پس اسطرح کتنے جملے مثل ص م کی ہون اونکا مجموعہ حاصل ہوسکتا ہی مگر ترکیب ذیل سی اکثر زیادہ فائدہ حاصل ہوتا ہے

اگر مح (لا) کسی لا کی جملہ ناطقہ صحیحہ کو تعبیر کری اور مطلوب یہہ ہو کہ حاصل جمع مح (ا) + مح (ب) + مح (س) + ...

دریافت کرین تو ہم کو یہہ معلوم ہے کہ

$$\frac{ح' (لا)}{ح (لا)} = \frac{1}{لا - ا} + \frac{1}{لا - ب} + \frac{1}{لا - س} + \cdots$$

اسبواسطی

$$\frac{مح (لا)\, ح' (لا)}{ح (لا)} = \frac{مح (لا)}{لا - ا} + \frac{مح (لا)}{لا - ب} + \frac{مح (لا)}{لا - س} + \cdots$$

= (مج(لا) − مج(ا)) / (لا − ا) + (مج(لا) − مج(ب)) / (لا − ب) + (مج(لا) − مج(س)) / (لا − س) + ...

+ مج(ا) / (لا − ا) + مج(ب) / (لا − ب) + مج(س) / (لا − س) + ...

اس مطابقہ مین اجزاء صحیحہ اور اجزاء مکسورہ جدا جدا آپسمین برابر ہونگے اور اسی جملی بیانیہ جیسی کہ (مج(لا) − مج(ا)) / (لا − ا) ہی بموجب دفعہ ۷ کے صحیح ہونگے فرض کرو کہ مج (لا) حَ (لا) کو ح (لا) پر تقسیم کرین اور عمل کئے جائین جب تک کہ باقی ایک جملہ صحیحہ لا کا ادنے درجہ کا بہ نسبت ح (لا) کی حاصل ہو اور ر باقی ہو تو مطابقہ کے اجزاء مکسورہ سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ر / ح(لا) = مج(ا) / (لا − ا) + مج(ب) / (لا − ب) + مج(س) / (لا − س) + ...

کو ضرب دو تو

ر = لا^(ن−۱) [مج(ا) + مج(ب) + مج(س) + ...]

+ ارقام ضمنین بہ نسبت لا^(ن−۱) کے ادنے قوتین ملتفہین

پس مج(ا) + مج(ب) + مج(س) + ... باقی ر مین لا^(ن−۱) کے امثال کی برابر ہے

(۲۵۱) اس باب کی صور قانونیہ کی ایک مثال لکھتی ہین فرض کرو کہ مساوات لا^۴ − لا^۳ − ۷لا^۲ + لا + ۶ = ۰ کی قیمتون کی قوتون کا حاصل جمع دریافت کرنا ہے

ص۱ = −ع۱ = ۱

ص۲ = −ع۱ ص۱ − ۲ع۲ = ۱ + ۱۴ = ۱۵

ص۳ = −ع۱ ص۲ − ع۲ ص۱ − ۳ع۳ = ۱۵ + ۷ − ۳ = ۱۹

ص۴ = −ع۱ ص۳ − ع۲ ص۲ − ع۳ ص۱ − ۴ع۴ = ۱۹ + ۱۰۵ − ۱ − ۲۴ = ۹۹

ص۵ = −ع۱ ص۴ − ع۲ ص۳ − ع۳ ص۲ − ع۴ ص۱ = ۹۹ + ۱۳۳ − ۱۵ − ۶ = ۲۱۱

ص۶ = −ع۱ ص۵ − ع۲ ص۴ − ع۳ ص۳ − ع۴ ص۲ = ۲۱۱ + ۶۹۳ − ۱۹ − ۹۰ = ۷۹۵

و علی ہذا القیاس

$\frac{1}{\text{ی}}$ کو بجاے لا کے مساوات معلوم مین رکہو تو

$$\text{ی}^4 + \frac{1}{6}\text{ی}^3 - \frac{7}{6}\text{ی}^2 - \frac{1}{6}\text{ی} + \frac{1}{6} = 0$$

پس اصل مساوات کی قیمتون کی منفی قوتون کی جمع کرنی کی واسطی ہم کو یہہ معلوم ہی کہ

$$\text{ص}_{-1} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{ص}_{-2} = -\frac{1}{6}\text{ص}_{-1} - 2\left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{1}{36} + \frac{14}{6} = \frac{85}{36}$$

ان نتایج کا اثبات آسانی سی ہوسکتا ہی کیونکہ اصل مساوات ایسی بنائی گئی ہی کہ اوسکی قیمتین -2 و -1 اور 3 ہین

اب پہر فرض کرو کہ ہم کو اس چوتہی درجہ کی مساوات $\text{لا}^4 + \text{ع}\,\text{لا}^3 + \text{ق}\,\text{لا}^2 + \text{ر}\,\text{لا} + \text{ث} = 0$ کی قیمتین ص_1 و ص_2 و ص_3 و ص_4 کی دریافت کرنی ہین

$\text{ص}_1 + \text{ع} = 0$ اسیواسطی $\text{ص}_1 = -\text{ع}$

$\text{ص}_2 + \text{ع}\,\text{ص}_1 + 2\text{ق} = 0$ اسیواسطی $\text{ص}_2 = \text{ع}^2 - 2\text{ق}$

$\text{ص}_3 + \text{ع}\,\text{ص}_2 + \text{ق}\,\text{ص}_1 + 3\text{ر} = 0$ اسیواسطے $\text{ص}_3 = -\text{ع}(\text{ع}^2 - 2\text{ق}) + \text{ع}\,\text{ق} - 3\text{ر}$

$$= -\text{ع}^3 + 3\text{ع}\,\text{ق} - 3\text{ر}$$

$$\text{ص}_4 + \text{ع}\,\text{ص}_3 + \text{ق}\,\text{ص}_2 + \text{ر}\,\text{ص}_1 + 4\text{ث} = 0$$

اسیواسطے $\text{ص}_4 = -\text{ع}(-\text{ع}^3 + 3\text{ع}\,\text{ق} - 3\text{ر}) - \text{ق}(\text{ع}^2 - 2\text{ق}) + \text{ر}\,\text{ع} - 4\text{ث}$

$$= \text{ع}^4 - 4\text{ع}^2\text{ق} + 4\text{ر}\,\text{ع} + 2\text{ق}^2 - 4\text{ث}$$

ایک اور مثال مساوات درجہ چہارم کی لو فرض کرو کہ مساوات درجہ چہارم کی $\text{لا}^4 + \text{ع}\,\text{لا}^3 + \text{ق}\,\text{لا}^2 + \text{ر}\,\text{لا} + \text{ث} = 0$ کی قیمتین سہ و صہ و لر و فر ہین

فرض کرو کہ $\text{ا} = \frac{1}{2}(\text{سہ}\,\text{صہ} + \text{لر}\,\text{فر})$ و $\text{ب} = \frac{1}{2}(\text{سہ}\,\text{لر} + \text{صہ}\,\text{فر})$ و $\text{س} = \frac{1}{2}(\text{سہ}\,\text{فر} + \text{صہ}\,\text{لر})$

اور ہم کو اس مساوات درجہ چہارم کی قیمتون کی ان بالقرینہ جملون کی قیمت دریافت کرنی ہو

(۱)　$\text{ا} + \text{ب} + \text{س}$

(۲) اب + ب س + س ا

(۳) ا ب س

(۱) ا + ب + س = ½ (سہ صہ + سہ لر + صہ فر + صہ لر + صہ فر + لر فر) = ق/۲

(۲) اب + ب س + س ا = ۱/۴ (سہ۲ صہ لر + سہ۲ لر فر + ۰۰۰) = ۱/۴ ح سہ۲ صہ لر

= ۱/۸ (ص۲ ص۲ − ص۲۲ − ۲ص ص۲ + ۲ص۴) بموجب دفعہ ۲۴۹ کے

پس قیمتین ص ا و ص ۲ و ص ۳ و ص ۴ کی جو اوپر حاصل ہوئی ہین اونکی جگہ مندرج کرو تو قیمت

۱/۴ ح سہ۲ صہ لر کی دریافت ہوگی یا ہم اسطرح عمل کرین کہ

ح سہ۲ صہ لر = ح سہ۲ صہ لر فر / فر = سہ صہ لر فر ح سہ / فر

اور سہ صہ لر فر = ث اور ح سہ/فر = ع/ث − ۴ بموجب دفعہ ۴۸ کے

اسیواسطی اب + ب س + س ا = ۱/۴ (ع ر − ۴ ث)

(۳) ا ب س = ۱/۸ (سہ۳ صہ لر فر + ۰۰۰ + سہ۲ صہ۲ لر۲ + ۰۰۰) =

۱/۸ ح سہ۳ صہ لر فر + ۱/۸ ح سہ۲ صہ۲ لر۲

اس باب کی ترکیبون سے ان دو بالقرینہ جملون کے قیمت دریافت ہوسکتی ہی اور ان ترکیبون کا ہم اختصار اسطرح کرتی ہی کہ

ح سہ۳ صہ لر فر = سہ صہ لر فر ح سہ۲ = ث (ع۲ − ۲ ق)

ح سہ۲ صہ۲ لر۲ = سہ۲ صہ۲ لر۲ فر۲ ح ۱/سہ۲ = ث۲ (ر۲/ث۲ − ۲ق/ث)

اسواسطی کہ ح (۱/سہ۲) دریافت کرتی کی واسطی اوس مساوات کے قیمتون کے مجذورون کا حاصل جمع دریافت کرین جسمین لا کی جگہ ۱/لا لکھا جاے

پس ا ب س = ۱/۸ (ر۲ + ع۲ ث − ۴ ق ث)

قیمتین جملون ا و ب و س کی جو دریافت ہوئی ہین اونکی صحت ثابت بھی ہوسکتی ہی اسلئی کہ وہ بموجب دفعہ ۱۸۹ کے قیمتین م کی مکعبی مساوات کی بموجب دفعہ ۱۸۸ کے ہین

بیسواں باب استعمال بالقرینہ جملون کا

(۲۵۲) مساوات کی قیمتون کی بالقرینہ جملون کے مسئلہ کو ہم دو جگہ کام مین لاینگی اول ایسی مساوات کی بنائی مین جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون کی تفاوت کے مجذور ہون اور دوم ایک بڑا مسئلہ مساوات مین سی مجہول کی دور کرنے کا اوسی ثابت کرینگے

(۲۵۳) ایسی مساوات بناؤ کہ جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون کے تفاوت کا مجذور ہون

فرض کرو کہ مساوات مفروضہ ان درجہ کی ہی اور اوسکی قیمتین ا و ب و س ... ہین تو مساوات مطلوبہ کی قیمتین (ا − ب)^2 و (ا − س)^2 ... (ب − س)^2 ... ہونگین اور ان کی تعداد برابر اوس اجتماع کی ہوگی جو ن چیزون مین سی دو دو کا لیا جاے یعنی $\frac{1}{2}$ن (ن − ۱) اسیواسطی یہہ عدد مساوات مطلوبہ کی درجے کو تعبیر کریگا − $\frac{1}{2}$ن (ن − ۱) کی جگہ م رکھو اور فرض کرو کہ مساوات مطلوبہ

$$\text{لا}^{م} + \text{ق}_1 \text{لا}^{م-1} + \text{ق}_2 \text{لا}^{م-2} + \cdots + \text{ق}_{م} = 0$$

سے تعبیر ہوتی ہی اور صَ$_ر$ اوسکی قیمتون کی ر وین قوتون کا مجموعہ ہی پس ہم کو صَ$_1$ و صَ$_2$ ... صَ$_م$ کا صرف تحقیق کرنا ہی اور بعد اس تحقیق کرنی کی امثال مساوات مطلوبہ کے بموجب دفعہ ۲۴۴ کے ان صورقانونیہ سی متواتر دریافت ہو جائینگی کہ صَ$_1$ + ق$_1$ = ۰ و صَ$_2$ + ق$_1$ صَ$_1$ + ۲ ق$_2$ = ۰ اور علی ہذا القیاس

فرض کرو کہ ح (لا) = (لا − ا)^{2ر} + (لا − ب)^{2ر} + (لا − س)^{2ر} + ...

پس ۲ صَ$_ر$ = ح (ا) + ح (ب) + ح (س) + ...

اب فرض کرو کہ ص$_1$ و ص$_2$ و ص$_3$ ... مساوات مفروضہ کی قیمتون کے قوتون کے مجموعون کو تعبیر کرتی ہین تو

$$\text{ح (لا)} = \text{ن لا}^{2ر} - 2\text{ر ص}_1 \text{لا}^{2ر-1} + \frac{2ر(2ر-1)}{1 \times 2} \text{ص}_2 \text{لا}^{2ر-2} - \cdots + \text{ص}_{2ر}$$

لا کی جگہ متواتر ا و ب و س ... رکھو اور جمع کرو تو

$$2\text{صَ}_ر = \text{ن ص}_{2ر} - 2\text{ر ص}_1 \text{ص}_{2ر-1} + \frac{2ر(2ر-1)}{1 \times 2} \text{ص}_2 \text{ص}_{2ر-2} - \cdots + \text{ن ص}_{2ر}$$

بائین طرف جو ارقام لکھی ہین اونمین اول اور آخر سی ارقام متساوی البعد آپسمین برابر ہین اسیواسطے

اونکی ترتیب ثانی سی اور ۲ پر تقسیم کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

صَ ر = ق ص ۲ر − ۲ر ص۱ ص ۲ر−۱ + (۲ر (۲ر−۱) / ۱ × ۲) ص۲ ص ۲ر−۲ − . .

+ ½ (−۱)^ر (۲ر (۲ر−۱) . . (ر+۱) / ⌊ر) ص ر^۲

اب ص۱ اور ص۲ . . . مساوات مفروضہ کی امثال کی قیمتون مین بیان ہوسکتی ہین پس صَ ر معلوم ہوسکتا ہی اور پہر اوسی اخرکار مساوات مطلوبہ کی امثال دریافت ہوجائینگے

(۴۲۵) مساوات مطلوبہ کی اخر رقم جو ق م سی تعبیر کی گئی ہی اوسکا حساب ایک اور طریقہ سی بہی ہوسکتا ہی

فرض کروکہ مساوات مفروضہ ح (لا) = ۰ پس

ح (لا) = (لا − ا) (لا − ب) (لا − س) . . .

پس حَ (لا) = (لا − ب) (لا − س) . . . + (لا − ا) (لا − س) . . . + . . .

حَ (ا) = (ا − ب) (ا − س) . . . .

حَ (ب) = (ب − ا) (ب − س) . . . . .

اسی معلوم ہوا کہ ق م = حَ (ا) حَ (ب) حَ (س) . . . .

اب فرض کروکہ سہ و صہ و لر . . قیمتین مساوات حَ (لا) = ۰ کی ہون تو

حَ (لا) = ن (لا − سہ) (لا − صہ) (لا − لر) . . .

اسیواسطی حَ (ا) حَ (ب) حَ (س) . . .

ن^ن (ا − سہ) (ا − صہ) (ا − لر) . . . (ب − سہ) (ب − صہ) . . . (س − سہ) . . .

لیکن (ا − سہ) (ب − سہ) (س − سہ) . . . = (−۱)^ن ح (سہ)

(ا − صہ) (ب − صہ) (س − صہ) . . . = (−۱)^ن ح (صہ)

اور علی ہذا القیاس

پس حَ (ا) حَ (ب) حَ (س) = ن^ن (−۱)^{ن(ن−۱)} ح (سہ) ح (صہ) ح (لر) . . .

= ن^ن ح (سہ) ح (صہ) ح (لر) . . .

اسواسطی $(-1)^{ن(ن-1)} = 1$

اسلیے $ح(س)\, ح(ص)\, ح(ل) \dots$ مساوات مشتقہ $ح(لا) = 0$ کی قیمتون کا جملہ بالقرینہ ہی اور اسیواسطی اوسکا حساب ہوسکتا ہے

(۲۵۵) ایک فایدہ ایسی مساوات کی دریافت کرنی کا کہ جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون کے تفاوت کا مجذور ہون دفعہ ۱۰۹ مین ہم نی بیان کیا ہی کہ اوسی مساوات مفروضہ کی قیمتون کا مقام معلوم ہوتا ہی مگر یہہ مطلب لوسٹرم صاحب کی ضابطہ سی خوب حاصل ہوتا ہی ایک اور بات اسی مساوات سی کہ جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون کے تفاوت کا مجذور ہون حاصل ہوتی ہی کہ اوسکی قیمتون کی دیکھنی سی مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتون کی تعداد معلوم ہوجاتا ہے اسواسطے کہ یہہ امر ظاہر ہی کہ اس جدید مساوات کی منفی قیمتین ہون تو مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتین ہونگین اور اگر مساوات جدید کی منفی قیمتین نہ ہون تو مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتین نہونگین اگر مساوات جدید کی خیالی قیمتین ہون تو مساوات مفروضہ کی بہی خیالی قیمتین ہونگین اور اگر اوسکی کوئی خیالی قیمت نہ ہو تو مساوات مفروضہ کی بہی کوئی خیالی قیمت نہ ہوگی

مثلاً مساوات مفروضہ درجہ چہارم کے یہہ قیمتین $\pm ل_1\sqrt{-1}$ اور $\pm ل_2\sqrt{-1}$ ہون تو اس صورت مین مساوات جدید کی حقیقی منفی قیمتین ہونگین

(۲۵۶) اگر دو مساواتون مین دو مقادیر مجہولہ ہون تو اب ہم یہہ بتلائینگی کہ اونمین سے ایک مقدار مجہول قیمتون کی بالقرینہ جملون سی کسطرح دور کرتے ہین

فرض کرو کہ مساواتین یہہ ہون کہ

$$ع_0 لا^م + ع_1 لا^{م-1} + ع_2 لا^{م-2} + \dots + ع_م = 0$$

$$ق_0 لا^ن + ق_1 لا^{ن-1} + ق_2 لا^{ن-2} + \dots + ق_ن = 0$$

مثال $ع_0$ و $ع_1$ و $ع_2 \dots$ $ق_0$ و $ق_1$ و $ق_2 \dots$ مقدار ی کے جملے ناطقہ صحیحہ ہین اور لا کا دور کرنا منظور ہے

فرض کرو کہ ان مساواتون مین سی اول مساوات سی لا کی قیمتین ارقام ر مین دریافت ہوئی ہین اور ا و ب و س ۰۰۰ ان کو تعبیر کرتی ہین ان کو دوسری مساوات مین مندرج کرو تو ہم کو م مساواتین ر کے تحقیق کرنے کے واسطی حاصل ہونگین یعنی

$$\text{ق}_0\,\text{ا}^{\text{ن}} + \text{ق}_1\,\text{ا}^{\text{ن}-1} + \text{ق}_2\,\text{ا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ق}_{\text{ن}} = 0$$

$$\text{ق}_0\,\text{ب}^{\text{ن}} + \text{ق}_1\,\text{ب}^{\text{ن}-1} + \text{ق}_2\,\text{ب}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ق}_{\text{ن}} = 0$$

$$\text{ق}_0\,\text{س}^{\text{ن}} + \text{ق}_1\,\text{س}^{\text{ن}-1} + \text{ق}_2\,\text{س}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ق}_{\text{ن}} = 0$$

پس تمام قیمتین ر کی جو قابل داخل ہونی کی ہین وہ ان مساواتون کی قیمتون مین شامل ہین اور بالعکس اسکی جو کوئی قیمت ان مساواتون کی ہو وہ ر کی قیمت قابل داخل ہونی کے ہے اسواسطی کہ تمثیلاً فرض کرو کہ مساوات اول کی ایک قیمت صہ ہی اور جب لا مین بجای ر کی صہ کہا جاے تو لا کی قیمت سہ ہوتی ہی پس لا = سہ اور ر = صہ دو اصل مساواتون کی شرائط کو پورا کرینگے اسواسطی کہ یہہ قیمتین بظاہر دوسرے مساوات کی شرائط کو پورا کرتی ہین اور مساوات اول کی شرائط لا = ا سی پوری ہوتی ہین خواہ ر کچہہ ہی ہو پس اسلئی جب ہم لا = ا اور ا مین ر کو صہ مقرر کرین تو بہی اول مساوات کی شرائط پوری ہونگین اسی یہہ استخراج ہوتا ہے کہ اگر اوپر کی مساواتون کی دائین طرف کی ارکان کو باہم ضرب دین اور حاصل ضرب کو برابر صفر کے لکہہ دین تو ایک مساوات اخر کار ر کی حاصل ہو جائیگی

مقادیر ا اور ب و س ۰۰۰ مین سی دو دو کے باہم تبادل سی یہہ حاصل ضرب متبدل نہین ہوگا اسلئی ان مقادیر کا وہ جملہ بالقرینہ ہوگا اور اسلئی اوسکی قیمت مساوات اول کو مثال ع۰ و ع۱ و ع۲ ۰۰۰ کی رقمون مین بیان ہو سکتی ہی پس اسطرح اخر کو ایک مساوات ناطقہ صحیحہ ر کی حاصل ہو جائیگی اور اوسمین وہی سب قیمتین ر کی ہونگین جو داخل ہونے کی قابلیت رکہتی ہین اور اونکی سوا کوئی اور قیمت نہین ہوگی

(۲۵۷) ایک خاص مثال فرض کرو کہ ایک مساوات مکعبی ہی اور دوسرے مساوات درجہ دوم کی ہے

اور ہم کو لا کا دور کرنا مساواتون سے منظور ہے۔

ع. لا^{۳} + ع$_{۱}$ لا^{۲} + ع$_{۲}$ لا + ع$_{۳}$ = ۰   ق. لا^{۲} + ق$_{۱}$ لا + ق$_{۲}$ = ۰

اسمین امثال ، کی جملی فرض کیی گیی ہین اب بموجب دفعہ گذشتہ کی طریقہ کتابت کی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے ،

(ق. ا^{۲} + ق$_{۱}$ ا + ق$_{۲}$) (ق. ب^{۲} + ق$_{۱}$ ب + ق$_{۲}$) (ق. س^{۲} + ق$_{۱}$ س + ق$_{۲}$) = یعنی

ق$_{۲}^{۳}$ + ق$_{۲}^{۲}$ ق. ا ب س + ق$_{۲}^{۳}$ ا^{۲} ب^{۲} س^{۲} + ق^{۲} ق$_{۲}$ ح ا^{۲} ب^{۲} + ق. ق$_{۱}$ ح ا^{۲} ب^{۲} س + ق$_{۱}$ ق$_{۲}$ ح ا ب

+ ق$_{۱}$ ق$_{۲}^{۲}$ ح ا + ق. ق$_{۲}^{۲}$ ح ا^{۲} + ق. ق$_{۱}^{۲}$ ح ا^{۲} ب س + ق. ق$_{۱}$ ق$_{۲}$ ح ا^{۲} ب = ۰

اور نیز ا ب س = − ع$_{۳}$/ع. اور ا^{۲} ب^{۲} س^{۲} = ع$_{۳}^{۲}$/ع.^{۲}

ح ا^{۲} ب^{۲} = ا^{۲} ب^{۲} س^{۲} ح 1/ا^{۲} = ع$_{۳}^{۲}$/ع.^{۲} (ع$_{۲}^{۲}$/ع$_{۳}^{۲}$ − ۲ع$_{۱}$/ع$_{۳}$)

ح ا^{۲} ب^{۲} س = ا ب س ح ا ب = − ع$_{۳}$/ع. ح ا ب = − ع$_{۲}$ ع$_{۳}$/ع.^{۲}

ح ا = − ع$_{۱}$/ع.   ح ا^{۲} = ع$_{۱}^{۲}$/ع.^{۲} − ۲ع$_{۲}$/ع.

ح ا^{۲} ب س = ا ب س ح ا = ع$_{۱}$ ع$_{۳}$/ع.^{۲}

ح ا^{۲} ب = ا ب س ح ا/ب = − ع$_{۳}$/ع. (ع$_{۱}$ ع$_{۲}$/ع. ع$_{۳}$ − ۳) بموجب دفعہ ۴۸ کے

ان قیمتون کی مندرج کرنی سی وہ مساوات حاصل ہوگی جو لا کے دور کرنے سے حاصل ہوتی

(۲۵۸) اگر ایک مساوات م درجہ اور دوسری ن درجہ کی ہوا اور اونمین دو مقداریں مجہول ہون اور

اونمین سی ایک مقدار مجہول کو دور کرین تو مساوات مستحصلہ م ن درجہ سی زیادہ درجہ کی نہین ہوگی

فرض کرو کہ مساواتین یہہ ہون کہ

ع. لا^{م} + ع$_{۱}$ لا$^{م-۱}$ + ع$_{۲}$ لا$^{م-۲}$ + . . . + ع$_{م}$ = ۰

ق. لا^{ن} + ق$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ق$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + . . . + ق$_{ن}$ = ۰

ان مساواتون مین امثال جملی ، کی ہین اور علاوہ اسکی یہہ بہی فرض کیا گیا ہی کہ مساوات اول مین

لا اور ی کی قوت نمایون کا مجموعہ م سی زیادہ نہین ہی اور مساوات دوم مین ن سی زیادہ نہین ہے

پس ع$_{م}$ اور ق$_{ن}$ م درجہ کی ہین ہو سکتی ہین مگر ن سی زیادہ نہین اب فرض کرو کہ دفعہ ۲۵۷ کے

کی ترکیب کی موافق لا دور کیا گیا تو ر کی مساوات اخر کا اول رکن مین ایک سلسلہ ارقام کا ہوگا جسمین سی ہر ایک رقم حاصل ضرب م اجزا ضربی کا ہی اور اوسکی صورت ق ا ن - ر × ق ب ن - ص + ق ط ن - ط . ہی اور چونکہ ہم یہہ جانتی ہین کہ یہہ سلسلہ ارقام کا جملہ بالقرینہ ا و ب س ... کا ہی تو مجموعہ ارقام مع قوت نمایون کی جنکا ابہی ذکر کیا ہے یہہ ہوگا کہ

ق ر ق ص ق ط ... ح ا ن - ر ب ن - ص س ن - ط

اب درجہ ق ر ق ص ق ط ... کا اعلی ر + ص + ط + ... سی نہین ہی تو اب ہم کو صرف یہہ ثابت کرنا رہا کہ درجہ ح ا ن - ر ب ن - ص س ن - ط ... کا بڑا ن - ر + ن - ص + ن - ط + ... سی نہین تو اسی یہہ استخراج ہوگا کہ حاصل ضرب کا درجہ اعلی م ن سی نہین ہی اب یہہ نتیجہ مطلوبہ دو مشاہدون سی حاصل ہوتا ہی اول دفعہ ۲۲۴ کے صور قانونیہ سی یہہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ص م مین اعلی قوتین ر کی بہ نسبت م ر کی نہین ملتق ہین دوم دفعہ ۲۴۸ اور ۲۴۹ کے عملوں سی مستنبط ہوتا ہی کہ قیمت ح ا ر ب ر س ر ... مین قوتین اور حاصل ضرب ص ۱ و ص ۲ و ص ۳ ... ص ر + ر + ر ملتق ہی اور ہر رقم مین فرض کی حروف ماتحت کا مجموع ر + ر + ر + ... ہے

اسی ہم یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ اخر مساوات ر مین کوئی قوت ر کی اعلی م ن سی نہین واقع ہوتی (۲۵۹) دفعہ گذشتہ سی ر کی اخر مساوات کی درجہ کی حد غائی معلوم ہوتی ہی کہ اوسی اگے وہ نہین بڑہتا لیکن وہ بعض صورتون مین اس حد غائی سی چہوٹا ہوتا ہے

مسئلہ کی توسیع ہو سکتی ہی اور یہہ نتیجہ عامہ اوسی مستنبط ہوتا ہی کہ جتنی مساواتین ہون اونمین اوتنی ہی مقادیر مجہول ملتف ہون اور یہہ تمام مقادیر مجہولہ سوا ایک کے دور کیجائین تو اخر کو جو مساوات حاصل ہوگی اوسکا درجہ اصل مساواتون کی درجون کی حاصل ضرب سی بڑا نہین ہوگا

سمرٹ کا جبر مقابلہ پڑہو

اکیسوان باب قیمتون کی قوتون کے مجموعی

(۲۶۰) نیوٹن صاحب کی ترکیب دفعہ ۲۴۴ میں جو بیان ہوئی ہی اوسی سے تواتر حاصل جمع مساوات کی قیمتوں کی قوتوں کا دریافت ہوسکتا ہے

اب ہم ایک اور ترکیب بیان کرتے ہیں جسکو کچھ لگاؤ اس پہلی ترکیب سے نہیں ہوگا جس سے قیمتوں کے قوائے صحیحہ مفروضہ کا مجموعہ حاصل ہوجاے

فرض کرو کہ ا و ب و س ... مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتیں ہیں تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

ح (لا) = (لا − ا) (لا − ب) (لا − س) ... اور فرض کرو کہ مساوات ن درجہ کی ہی تو

$$\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^{\text{ن}}} = \left(1-\frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right)\left(1-\frac{\text{ب}}{\text{لا}}\right)\left(1-\frac{\text{س}}{\text{لا}}\right)$$

طرفین کی لوکارثم لو اور بائیں طرف کی لوکارثم کی صورت مفصلہ لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{لوک}\,\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^{\text{ن}}} = -\frac{1}{\text{لا}}(\text{ا}+\text{ب}+\text{س}+\cdots)$$
$$-\frac{1}{2\,\text{لا}^2}(\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{س}^2+\cdots)$$
$$-\frac{1}{3\,\text{لا}^3}(\text{ا}^3+\text{ب}^3+\text{س}^3+\cdots)$$
$$-\cdots$$

پس بائیں طرف امثال $\frac{1}{\text{لا}^{\text{م}}}$ کا $-\frac{\text{ص}_{\text{م}}}{\text{م}}$ ہی اسی معلوم ہوا کہ $\frac{\text{ص}_{\text{م}}}{\text{م}}$ = امثال $\frac{1}{\text{لا}^{\text{م}}}$ کے جو صورت مفصلہ − لوک $\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^{\text{ن}}}$ میں ہیں اور یہہ صورت مفصلہ قوائے متنازلہ لا میں لکھی گئی ہو

اسمین م مثبت فرض کیا گیا ہی اگر قوائے متصلہ صحیحہ کا حاصل جمع دریافت کرنا منظور ہو تو لا کو $\frac{1}{\text{ی}}$ سے بدل دو اور مساوات ی کی قیمتوں کی مثبت قوائے کا مجموعہ اس مساوات میں دریافت کرو

(۲۶۱) تمثیلاً مساوات لا² − ع لا + ق = ۰ کی قیمتوں کی م قوتوں کا مجموعہ دریافت کرو

یہاں $\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^2} = 1-\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)$ و − لوک $\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^2}$ = − لوک $\left[1-\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)\right]$

$$= \frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^3+\cdots+\frac{1}{\text{م}}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^{\text{م}}+\cdots$$

امثال کامل $\frac{1}{\text{لا}^{\text{م}}}$ کے − لوک $\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^2}$ میں مختلف ارقام سے منتخب کرنی سے جنمیں لا واقع ہو حاصل ہوسکتی ہیں ان ارقام کو اگر بہ ترتیب معکوس لکھیں تو

$$\frac{1}{\text{م}}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^{\text{م}}+\frac{1}{\text{م}-1}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^{\text{م}-1}+\frac{1}{\text{م}-2}\left(\frac{\text{ع}}{\text{لا}}-\frac{\text{ق}}{\text{لا}^2}\right)^{\text{م}-2}+\cdots$$

اسواسطے امثال $\frac{1}{\text{لا}^{\text{م}}}$ یہہ ہین کہ

$$\frac{1}{\text{م}}\text{ع}^{\text{م}} - \frac{\text{م}}{\text{م}-1}\cdot\frac{\text{م}-1}{1}\text{ع}^{\text{م}-2}\text{ق} + \frac{\text{م}}{\text{م}-2}\cdot\frac{(\text{م}-2)(\text{م}-3)}{1\times 2}\text{ع}^{\text{م}-4}\text{ق}^{2} - \ldots$$

$$\text{پس ص}_{\text{م}} = \text{ع}^{\text{م}} - \text{م}\,\text{ع}^{\text{م}-2}\text{ق} + \frac{\text{م}(\text{م}-3)}{1\times 2}\text{ع}^{\text{م}-4}\text{ق}^{2} - \ldots$$

$$+ (-1)^{\text{ر}}\frac{\text{م}(\text{م}-\text{ر}-1)\ldots(\text{م}-2\text{ر}+1)}{\lfloor\text{ر}}\text{ع}^{\text{م}-2\text{ر}}\text{ق}^{\text{ر}} + \ldots$$

فرض کرو کہ ق = ١ تو مساوات درجہ دوم مساوات مشکافیہ ہوگی اور اوسکی قیمتین ا اور $\frac{1}{\text{ا}}$ کی موحصوبات کے دفعہ ۱۳۳ کے ہونگین

پس ہم $\text{ا} + \frac{1}{\text{ا}} = \text{ع}$. رکھین تو

$$\text{ا}^{\text{م}} + \frac{1}{\text{ا}^{\text{م}}} = \text{ع}^{\text{م}} - \text{م}\,\text{ع}^{\text{م}-2} + \frac{\text{م}(\text{م}-3)}{1\times 2}\text{ع}^{\text{م}-4}$$

$$+ (-1)^{\text{ر}}\frac{\text{م}(\text{م}-\text{ر}-1)\ldots(\text{م}-2\text{ر}+1)}{\lfloor\text{ر}}\text{ع}^{\text{م}-2\text{ر}} + \ldots$$

پس ہم نی ایک جملہ بانیہ علی العموم $\text{ا}^{\text{م}} + \frac{1}{\text{ا}^{\text{م}}}$ کے واسطے ایسا حاصل کیا جسمین ارقام $\text{ا} + \frac{1}{\text{ا}}$ کی قوتین ہین دفعہ ۱۳۸ دیکھو

(۲۶۲) اب یہہ فرض کرو کہ مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} - 1 = 0$ کی قیمتوں کی م قوتوں کا حاصل جمع دریافت کرنا مطلوب ہے۔

یہان $\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^{\text{ن}}} = 1 - \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}}$

$$\therefore \text{لوک}\,\frac{\text{ح}(\text{لا})}{\text{لا}^{\text{ن}}} = \frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}} + \frac{1}{2\,\text{لا}^{2\text{ن}}} + \frac{1}{3\,\text{لا}^{3\text{ن}}} + \frac{1}{4\,\text{لا}^{4\text{ن}}} + \ldots$$

یہان امثال $\frac{1}{\text{لا}^{\text{م}}}$ کے صفر ہین بشرطیکہ م اضعاف ن کا نہ ہو اور تب امثال $\frac{\text{ن}}{\text{م}}$ ہونگی اور

پس $\text{ص}_{\text{م}} = 0$ بشرطیکہ م اضعاف ن کا نہ ہو اور اگر یہہ ہو گا تو $\text{ص}_{\text{م}} = \text{ن}$

یہہ نتیجہ بڑی کام کا ہی دفعات اینده مین اوسکی تین استعمال بیان کرینگے

(۲۶۳) اب ہم یہہ بتلائینگی کہ ایک سلسلہ معلوم کی خاص منتخب رقموں کا حاصل جمع کسطرح دریافت کرتی ہین

فرض کرو کہ $\text{ح}(\text{لا}) = \text{ا}_0 + \text{ا}_1\text{لا} + \text{ا}_2\text{لا}^2 + \ldots$ لا انتہا اور مطلوب یہہ ہی کہ اس سلسلہ

$$\text{ا}_{\text{م}}\text{لا}^{\text{م}} + \text{ا}_{\text{م}+\text{ن}}\text{لا}^{\text{م}+\text{ن}} + \text{ا}_{\text{م}+2\text{ن}}\text{لا}^{\text{م}+2\text{ن}} + \ldots \text{ لا انتہا}$$

کا حاصل جمع دریافت کرین

فرض کرو کہ سہ و صہ و لہ ۔ ۔ ۔ ن مرتبی کی نزول واحد کی ہین یعنی ن قیمتین مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = ۰$ کی ہین اس مطابقہ کی طرفین کو $\text{سہ}^{\text{ن}-\text{م}}$ مین ضرب دو اور لا کو سہ لا سے بدل دو

تو $\text{سہ}^{\text{ن}-\text{م}}\ \text{ج}\ (\text{سہ لا}) = \text{ا}_۰\, \text{سہ}^{\text{ن}-\text{م}} + \text{ا}_۱\, \text{سہ}^{\text{ن}-\text{م}+۱}\, \text{لا} + \text{ا}_۲\, \text{سہ}^{\text{ن}-\text{م}+۲}\, \text{لا}^۲ + \dots$ اور اسیطرح

$$\text{صہ}^{\text{ن}-\text{م}}\ \text{ج}\ (\text{صہ لا}) = \text{ا}_۰\, \text{صہ}^{\text{ن}-\text{م}} + \text{ا}_۱\, \text{صہ}^{\text{ن}-\text{م}+۱}\, \text{لا} + \text{ا}_۲\, \text{صہ}^{\text{ن}-\text{م}+۲}\, \text{لا}^۲ + \dots$$

$$\text{لہ}^{\text{ن}-\text{م}}\ \text{ج}\ (\text{لہ لا}) = \text{ا}_۰\, \text{لہ}^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_۱\, \text{لہ}^{\text{ن}-\text{م}+۱}\, \text{لا} + \text{ا}_۲\, \text{لہ}^{\text{ن}-\text{م}+۲}\, \text{لا}^۲ + \dots$$

اور علی ہذا القیاس

اب یہہ جو ن مطابقہ اسطرح بنائی جائین اونکو جمع کرو تو بائین طرف ن گنا سلسلہ مطلوبکا بموجب دفعہ ۲۶۲ کے حاصل ہوگا پس

$$\text{ا}_\text{م}\, \text{لا}^\text{م} + \text{ا}_{\text{م}+\text{ن}}\, \text{لا}^{\text{م}+\text{ن}} + \text{ا}_{\text{م}+۲\text{ن}}\, \text{لا}^{\text{م}+۲\text{ن}} + \dots$$

$$= \frac{۱}{\text{ن}} \left\{ \text{سہ}^{\text{ن}-۱}\ \text{ج}\ (\text{سہ لا}) + \text{صہ}^{\text{ن}-\text{م}}\ \text{ج}\ (\text{صہ لا}) + \text{لہ}^{\text{ن}-\text{م}}\ \text{ج}\ (\text{لہ لا}) + \dots \right]$$

(۲۶۴) اب دفعہ ۲۶۲ کی استعانت سی ہم یہہ مسئلہ ثابت کرسکتی ہین کہ جملہ $(\text{لا}+\text{د})^{\text{ن}} - \text{لا}^{\text{ن}} - \text{د}^{\text{ن}}$ پوری $\text{لا}^۲ + \text{لا د} + \text{د}^۲$ پر تقسیم ہوسکتی ہی اگر ن طاق صحیح عدد ہو اور ۳ پر پورا تقسیم نہ ہوتا ہو اور وہ $(\text{لا}^۲ + \text{لا د} + \text{د}^۲)^۲$ پر پورا تقسیم ہوگا اگر ن شکل ۶م + ۱ کا ہو اس صورت صحیح

فرض کرو کہ ا و سہ و صہ واحد کی تین جزر الکعب ہین یعنی مساوات $\text{لا}^۳ - ۱ = ۰$ کی تین قیمتین ہین تو حاصل ضرب ان تین قیمتون کا بموجب دفعہ ۴۵ کے ۱ ہے

یعنی بموجب دفعہ ۴۵ کے سہ صہ = ۱ و بموجب دفعہ ۲۶۲ کی $۱ + \text{سہ}^\text{م} + \text{صہ}^\text{م} = ۰$ بشرطیکہ م اضعاف ۳ کا نہ ہو

$$\text{پس}\quad \text{لا}^۲ + \text{لا د} + \text{د}^۲ = (\text{لا} - \text{سہ د})\ (\text{لا} - \text{صہ د})$$

اسی معلوم ہوا کہ $(\text{لا}+\text{د})^{\text{ن}} - \text{لا}^{\text{ن}} - \text{د}^{\text{ن}}$ پورا پورا تقسیم $\text{لا}^۲ + \text{لا د} + \text{د}^۲$ پر ہوتا ہی بشرطیکہ وہ لا = سہ د سی اور لا = صہ د سی معدوم ہوتا ہی اور وہ پورا $(\text{لا}^۲ + \text{لا د} + \text{د}^۲)^۲$ پر تقسیم ہوتا ہے بشرطیکہ اوسکا جملہ مشتقہ $\text{ن}\,(\text{لا}+\text{د})^{\text{ن}-۱} - \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}$ [illegible]

لا = صہ د سے معدوم ہوتا ہو

جب لا = سہ د تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

$$(لا+د)^{ن} - لا^{ن} - د^{ن} = د^{ن}\left[(۱+سہ)^{ن} - سہ^{ن} - ۱\right] = د^{ن}\left[(-صہ)^{ن} - سہ^{ن} - ۱\right]$$

اور یہہ معدوم ہوتا ہے جب ن طاق ہو اور پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

اور نیز جب لا = سہ د

$$ن\,(لا+د)^{ن-۱} - ن\,لا^{ن-۱} = ن\,د^{ن-۱}\left[(۱+سہ)^{ن-۱} - سہ^{ن-۱}\right] = ن\,د^{ن-۱}\left[(-صہ)^{ن-۱} - سہ^{ن-۱}\right]$$

یہہ معدوم ہوتا ہی اگر ن-۱ جفت صحیح ہو اور اضعاف ۲ کا ہو کیونکہ $سہ^{۳} = ۱$ اور $صہ^{۳} = ۱$ اور اگر ن-۱ جفت صحیح ہو اور اضعاف ۳ کا ہو تو یہہ استخراج ہوتا ہے کہ ن طاق صحیح ہے اور ۳ پر تقسیم نہیں ہوتا پس $(لا+د)^{ن} - لا^{ن} - د^{ن}$ یہی معدوم ہوتا ہے اور یہی نتیجہ حاصل ہو سکتا ہی اگر صہ د کو بجای لا کے رکہیں

(۲۶۵) اب آخر استعمال دفعہ ۲۶۲ کا یہہ ہی کہ ہم اس مسئلہ کو ثابت کریں فرض کرو کہ اس سلسلہ

$$۱ - \frac{ن-۳}{۲} + \frac{(ن-۴)(ن-۵)}{|۳} - \frac{(ن-۵)(ن-۶)(ن-۷)}{|۴} + \cdots$$
$$+ (-۱)^{ر-۱}\frac{(ن-ر-۱)(ن-ر-۲)\cdots(ن-۲ر+۱)}{|ر} + \cdots$$

کا حاصل جمع ص ہے تو

$ص = \frac{۳}{ن}$ اگر ن طاق مثبت صحیح پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہو

$ص = ۰$ اگر ن طاق مثبت صحیح پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

$ص = \frac{۱}{ن}$ اگر ن جفت مثبت صحیح پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہو

$ص = \frac{۲}{ن}$ اگر ن جفت مثبت صحیح پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

دفعہ ۲۶۱ میں لا د کو بجای ق کی اور لا+د کو بجای ع کی رکہو تو $ص_{ن} = لا^{ن} + د^{ن}$

پس اگر ن مثبت صحیح ہے

$$(لا+د)^{ن} - لا^{ن} - د^{ن} = ن\,لا\,د\,(لا+د)\left[(لا+د)^{ن-۳} - \frac{ن-۳}{۲}\,لا\,د\,(لا+د)^{ن-۵}\right.$$

فرض کرو کہ او سہ و صہ واحد کے تین جزر المکعب ہوں لا = سہ ی کی رکھو (۱) کی بائیں طرف کا رکن یہہ ہو جایگا کہ

ن سہ (۱ + سہ) یⁿ [(۱ + سہ)^ن−۳ − (ن−۳)/۲ سہ (۱ + سہ)^ن−۵ + ((ن−۴)(ن−۵))/ا۳ سہ^۲ (۱ + سہ)^ن−۷ ۔۔]

لیکن سہ صہ = ۱ اور اسیواسطی صہ^۲ = سہ صہ^۳ = سہ اور سہ + صہ + ۱ = ۰

پس − صہ = سہ + ۱ پس سہ = (سہ + ۱)^۲ اسی معلوم ہوا کہ بائیں طرف کا رکن (۱) کا متبدل ہو کر یہہ ہوگا کہ

ن (۱ + سہ)^ن یⁿ [۱ − (ن−۳)/۲ + ((ن−۴)(ن−۵))/ا۳ − ۔۔]

یعنی ن (− صہ)^ن یⁿ ص

اور نیز جب لا = سہ ی تو دائیں طرف کا رکن مساوات کا یہہ ہو جایگا کہ

یⁿ [(۱ + سہ)^ن − سہ^ن − ۱] یعنی یⁿ [(− صہ)^ن − سہ^ن − ۱]

اسیواسطی (− صہ)^ن − سہ^ن − ۱ = ن (− صہ)^ن ص (۲)

اگر ن طاق صحیح پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا برابر − ۳ کے بموجب دفعہ ۲۶۲ کی ہی اور اسیواسطی − ۳ = − ن صہ^ن ص = − ن ص اسیواسطی ص = ۳/ن

اگر ن طاق صحیح ہی اور ۳ پر پورا نہیں تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا صفر ہے بموجب دفعہ ۲۶۲ کے ہے اور اسیواسطے ص = ۰

اگر ن جفت صحیح ہی اور ۳ پر پورا تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا − ۱ ہے اور بائیں طرف کا رکن ن ص ہی اسیواسطی ص = − ۱/ن

اگر ن جفت صحیح ہی اور ۳ پر پورا نہیں تقسیم ہوتا تو دائیں طرف کا رکن صہ^ن − سہ^ن − ۱ ہی یعنی ۲ صہ^ن کیونکہ سہ^ن + صہ^ن + ۱ = ۰ پس ۲ صہ^ن = ن صہ^ن ص اور اسیواسطی ص = ۲/ن

اس بات پر بھی خیال کرنا چاہئی کہ سلسلہ جو ص کی تعبیر ہوتا ہی اوسمیں محدود تعداد رقموں کی ہے اور فی الحقیقت اگر ن = ۲ م یا ۲ م + ۱ کے ہو تو م رقمیں سلسلہ میں ہونگیں

(٢٦٦) مساوات کی قیمتون کے قوتون کی مجموعون کی قیمتون کو مساوات کی تقریبی قیمت دریافت کرنی اندر یہی کام مین لاتی ہین اس ترکیب کا بیان ہم مرفی صاحب کے رسالہ مسائل معادلات سی نقل کرتی ہین فرض کرو کہ ا و ب و س . . . قیمتین مساوات کی ہین اور وہ سب حقیقی ہین اور تعداد اً ا سب سی بڑی قیمت ہے

اب ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

$$\frac{ص_{م+1}}{ص_م} = \frac{ا^{م+1} + ب^{م+1} + س^{م+1} + \cdots}{ا^م + ب^م + س^م + \cdots}$$

$$= ا \; \frac{1 + \left(\frac{ب}{ا}\right)^{م+1} + \left(\frac{س}{ا}\right)^{م+1} + \cdots}{1 + \left(\frac{ب}{ا}\right)^{م} + \left(\frac{س}{ا}\right)^{م} + \cdots}$$

اب اگر م کو بڑا کافی فرض کرین تو بائین طرف کا رکن خاطر خواہ ا کے قریب ہو سکتا ہے یعنی قریب سب سی بڑی عددی قیمت کے ہوتا ہے

(٢٦٧) اب ہم یہہ بیان کرتی ہین کہ اگر دفعہ گذشتہ مین خیالی قیمتین بھی ہون تو اوسکی نتیجہ مین کیا ترمیم ہو گی فرض کرو کہ $ص + ل\sqrt{-1}$ اور $ص - ل\sqrt{-1}$ ایک زوج مزدوجہ خیالی قیمتون کا ہو تو اوسکا مجموعہ ٢ص اور اوسکا حاصل ضرب $ص^2 + ل^2$ ہو گا اور یہہ حاصل ضرب مطلق اونکی قالب کا ہی جبر و مقابلہ کا پچیسوان باب دیکھو

$$اب \quad ص \pm ل\sqrt{-1} = لب\left(\frac{ص}{لب} \pm \frac{ل}{لب}\sqrt{-1}\right)$$

فرض کرو کہ $\frac{ص}{لب}$ = جم بر اور $\frac{ل}{لب}$ = جب بر

پس مس بر $= \frac{ل}{ص}$ اور $لب^2 = ص^2 + ل^2$

پس لب قالب ہی اور مزدوج قیمتین اس صورت مین لکھی جا سکتی ہین کہ

لب (جم بر $\pm \sqrt{-1}$ جب بر) اور ڈی موائور کے ضابطہ سی مجموعہ دو قیمتون کی م قوتون کا ٢ $لب^م$ جم م بر ہے

پس اگر سب سے بڑی حقیقی قیمت کی عددی قدر بڑی خیالی قیمتون کی قالب سی ہو تو $\frac{ص_{م+1}}{ص_م}$ لانہایت زیادہ ہوتی سی ایک حد خاص کی طرف مائل ہو گی یعنی سب سے

بڑی قیمت کی طرف از روی تعداد کی لیکن اگر سب سے بڑی حقیقی قیمت کی مقدار دی خیالی قیمتون کی قالب سی بڑی نہ ہو تو $\frac{ص_{م+1}}{ص_م}$ کی کوئی حد غائی نہ ہوگی

(۲۶۸) مثال $لا^3 - 2لا - 5 = 0$ یہان سلسلہ $ص_1$ و $ص_2$ و $ص_3$ ...

۰ و ۴ و ۱۵ و ۱۸ و ۵۰ و ۹۱ و ۱۷۰ و ۳۴۲ و ۵۳۷ و ۱۵۴۴ و ۳۰۳۶۳ و ۶۸۰۸۰ و ۱۵۰۸۰

و ۵۶۷۱۳۵ و ۱۲۹۶۱ و ۱۳۸۹ و ۳۰۱۲۷۸ و ۹۹۶۸۹۵ ... ہے

ہر ایک رقم کو اوسکی ماقبل کی رقم پر تقسیم کرتی ہین تو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ حاصل کو ایک مثلاً ۲ کی حد کی طرف ہی اسی یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ ایک حقیقی قیمت کچھہ بڑی ۲ سی ہی مگر یہہ مثال اس ترکیب کے واسطی مناسب نہین ہی کیونکہ حاصل ضرب تمام قیمتون کا ۵ ہی اور ایک حقیقی قیمت کچھہ زیادہ ۲ سے اور باقی دو قیمتون کا حاصل ضرب تقریباً ۵ء۲ ہی یہہ دو قیمتین بموجب دفعہ ۱۷۲ کے خیالی ہین اور چونکہ اونکا قالب اونکی حاصل ضرب کا جذر ہی تو قالب بڑا بہ نسبت ۵ء۱ کے ہوا پس قالب بمقابلہ حقیقی قیمت کی بہت چھوٹا نہین ہی پس جملہ $\frac{ص_{م+1}}{ص_م}$ اہستہ اہستہ ایک حد غائی کی طرف پہونچتا ہے

(۲۶۹) دفعہ ۲۶۶ کے ترکیب کے متماثل ایک ترکیب ہے جسی کہ تعداداً سب سی بڑی دو قیمتون کا حاصل ضرب خاص صورتون مین معلوم ہوجاتا ہے

اسواسطی کہ $ص_م = ا^م + ب^م + س^م + \cdots$

$ص_{م+1} = ا^{م+1} + ب^{م+1} + س^{م+1} + \cdots$

$ص_{م+2} = ا^{م+2} + ب^{م+1} + س^{م+1} + \cdots$

اسیواسطے $ص_م\, ص_{م+2} - ص^2_{م+1} = ا^م ب^م (ا-ب)^2 + ا^م س^م (ا-س)^2$
$+ ب^م س^م (ب-س)^2 + \cdots$

اسکو لوم سے تعبیر کرو تو

$$لوم = ا^م ب^م (ا-ب)^2 \left[1 + \frac{س^م}{ب^م} \left(\frac{ا-س}{ا-ب}\right)^2 + \frac{س^م}{ا^م} \left(\frac{ب-س}{ا-ب}\right)^2 + \cdots \right]$$

اب بموجب دفعہ ۲۶۶ و ۲۶۷ کے عمل کرنے سی ہم کو نتائج مفصلہ ذیل حاصل ہونگے

(۱) اگر سب حقیقی قیمتیں ہیں تو $\frac{\text{لوم}+۱}{\text{لوم}}$ کو خاطر خواہ م کی زیادہ کرنے سے تعداداً دو سب سے بڑی قیمتوں کے حاصل ضرب کے قریب لا سکتی ہیں

(۲) اگر حقیقی قیمتیں تعداداً بڑی کسی خیالی قیمت کی قالب سی ہی تو $\frac{\text{لوم}+۱}{\text{لوم}}$ کی حد غائی ہوگی یعنی ان قیمتوں میں سی سب سی بڑی دو قیمتوں کا حاصل ضرب

(۳) اگر تعداداً سب سی دو بڑی قیمتوں کی حاصل ضرب کی جذر سی خیالی قیمتوں کا قالب بڑا ہے تو $\frac{\text{لوم}+۱}{\text{لوم}}$ کی حد غائی کی قیمت ہوگی یعنی مجذور اوس قالب کا ہوگا یعنی حاصل ضرب اون خیالی قیمتوں کے حاصل ضرب کا جنکا وہ قالب تھا

(۴) پس صرف ایک صورت جسمین $\frac{\text{لوم}+۱}{\text{لوم}}$ سی حد غائی کی نہ ہونی کا نقص عاید ہوتا ہے یہہ ہی کہ ایک صرف حقیقی قیمت ہو اور خیالی قیمتوں کی سب سے بڑی قالب سے تعداداً بڑی ہو اس صورت میں حقیقی قیمت موافق دفعہ ۲۶۷ کے دریافت ہو جاتی ہے

(۲۷۰) بعض صورتوں میں اسی ترکیب کے متماثل ترکیب سی حاصل جمع یہی دو قیمتوں کا دریافت کرنا ممکن ہے

$\text{ص}_{\text{م}}$ و $\text{ص}_{\text{م}+۱}$ و $\text{ص}_{\text{م}+۲}$ اور $\text{ص}_{\text{م}+۳}$ کی قیمتوں سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ص}_{\text{م}}\,\text{ص}_{\text{م}+۳} - \text{ص}_{\text{م}+۱}\,\text{ص}_{\text{م}+۲} = \text{اٰ}\,\text{ا}^{\text{م}}\text{ب}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب})(\text{ا}-\text{ب})^{۲} + \text{اٰ}\,\text{ا}^{\text{م}}\text{س}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{س})(\text{ا}-\text{س})^{۲} + \text{بٰ}\,\text{ب}^{\text{م}}\text{س}^{\text{م}}(\text{ب}+\text{س})(\text{ب}-\text{س})^{۲} + \dots$$

اب اسکو مع م سی تعبیر کرو پس $\frac{\text{مع م}}{\text{لوم}}$ کی معنی تو دفعہ گذشتہ میں مقرر ہو گئی ہیں اب ہم یہاں یہہ دریافت کرینگے $\frac{\text{مع م}}{\text{لوم}}$ کی ایک حد غائی اون صورتوں میں ہی جنکا ذکر اوپر کی دفعہ میں ہوا اور یہہ حد غائی مجموعہ تعداداً سب سی بڑی دو قیمتوں کا ہی یا مجموعہ دو خیالی قیمتوں کا ہی جنکا قالب سب سے بڑا ہے

(۲۷۱) پس دفعہ ۲۶۹ کی (۱) و (۲) و (۳) صورتوں میں حاصل ضرب دو قیمتوں کا بموجب دفعہ ۲۶۹ کی اور اونکا مجموعہ بموجب دفعہ ۲۷۰ کے حاصل ہو سکتا ہے اور (۱) اور (۲) کی صورتوں میں بموجب دفعہ ۲۷۰ کی دو قیمتوں کا مجموعہ معلوم ہو سکتا ہے

اور دفعہ ۲۶۶ کے اونہین سی بڑی قیمت معلوم ہوسکتی ہے

(۲۷۲) مثال لا^{4} + لا^{3} + ۴لا^{2} − ۴لا + ۱ = ۰

یہان بہ تفصیل ذیل قیمتین حاصل ہوتی ہین

ارقام ص$_1$ و ص$_2$ . . . کے واسطے

−۱ و −۷ و ۲۳ و −۳ و −۱۱۶ و ۲۲۷ و ۲۰۲ و −۱۵۷۱ ۰ . . . . .

ارقام لو$_1$ و لو$_2$ و . . کے واسطے

−۲ و −۷ و −۵۰۸ و ۲۴۶۷ و −۳۷ و ۱۴۱۳ و −۱۴۹۶۱ و ۷۴۹۲۱ و −۳۹۷۴۲۱ . . .

اور ارقام مو$_1$ و مو$_2$ . . کے واسطے

۱۶۴ و ۸۸۱ و ۳۸۷۳ و ۴۸۲۶ و ۲۵۷۲ و ۳۸۲ و ۱۳۶ . . . . .

اب یہان سلسلہ ص$_1$ و ص$_2$ . . . مین ایک رقم کو ماقبل کی رقم پر تقسیم کرنی سی ایک محدود حد نہین حاصل ہوتی اسی ہم کو یہہ قطعی معلوم ہوتا ہی کہ مساوات کی خیالی قیمتین ہین اور سلسلہ لو$_1$ و لو$_2$ . . . کو اپنی ماقبل کی رقم پر تقسیم کرنی سی وہ خارج قسمت حاصل ہوتی ہین جنسی معلوم ہوتا ہے کہ دو قیمتون کی حاصل ضرب کی قدر ۵٫۳۰ ہی اور سلسلہ مو$_1$ و مو$_2$ . . کی ہریک رقم سلسلہ لو$_1$ و لو$_2$ . . . کی ہریک رقم متناظر پر تقسیم کرنے سی وہ خارج قسمت حاصل ہوتی ہین جنسی معلوم ہوتا ہی کہ مجموعہ ان دو قیمتون کا − ۱٫۸۱۹ ہے

پس ان دو قیمتون سی ہم دو خیالی قیمتین تقریباً دریافت کرسکتی ہین

اور چونکہ مساوات کی لئی چارون قیمتون کا مجموعہ − ۱ ہی اور اوسکا حاصل ضرب ۱ ہی تو مجموعہ باقی دو قیمتون کا وغیرہ ۸۱۹٫ ہی اور اوسکا حاصل ضرب وغیرہ $\frac{1}{۵٫۳۰}$ ہی اسواسطی یہہ دو قیمتین بہی خیالی ہین

پس اسطرح ہم کو یہہ معلوم ہوگا کہ خیالی قیمتون کے اول زوج کا قالب پانچ گنہ دوسرے خیالی قیمتون کے زوج کی قالب سی ہی اسی معلوم ہوا کہ بموجب طریقہ کتابت دفعہ ۲۷۰ کے ہم کو دریافت

دریافت ہوگا کہ لوم = ام ب۲ (ا – ب)۲ اب اور ارقام کو چھوڑ دیں تو غلطی بقدر
۱/۵م حصہ کل کی قریب واقع ہوگی اور اسی ہم اپنی نتیجہ کی صحت کا اندازہ کرسکتی ہیں
مثلاً ہم نی اوپر قیمتیں لو۱ کی لو۵ اور لو۶ تک لکھی ہیں تو حاصل ضرب کے دریافت کرنے
میں غلطی قریب (۱/۵) دیں حصہ کل کے واقع ہوگی

بائیسواں باب دور کرنا مقادیر مجہول کا یعنی اسقاط

(۲۷۳) فرض کرو کہ دو ہمزاد مساواتیں دو مجہول کی ہم کو حل کرنی ہیں بعض صورتیں ایسی ہوتی ہیں
کہ جنمیں اونکا حل کرنا نہایت آسان ہوتا ہی فرض کرو کہ لا اور ر مقادیر مجہول کو تعبیر کرتی ہیں
پس اگر ایک مساوات میں لام ملتف ہو اور کوئی اور قوت لا کی نہ ملتف ہو تو اس مساوات سی لا کی
قیمت ر کی رقموں میں دریافت کریں اور اوسکو دوسری مساوات میں مندرج کریں تو ایک مساوات
حاصل ہو جائیگی جسمیں فقط مقدار مجہول ر ہی ملتف ہوگی اور اوسکی قیمتیں تقریبی یا تحقیقی اون
ترکیبوں سی دریافت ہونگیں جو اوپر بیان ہوئیں
اب پہر فرض کرو کہ مساواتیں ا = ۰ ب = ۰ سی تعبیر ہوتی ہیں اور ا اور ب
جلدی سے اجزا ضربی میں تحلیل ہوسکتی ہیں مثلاً فرض کرو کہ ا = لو لو لو اور ب = صو صو
تو معادلات مفروضہ کی تمام حل ان ہمزاد مساواتوں کے حل کرنی سی حاصل ہونگی کہ لو = ۰ صو = ۰ و
لو = ۰ اور صو = ۰ لو = ۰ اور صو = ۰ و لو = ۰ اور
صو = ۰ اور لو = ۰ اور صو = ۰ اور لو = ۰ اور صو = ۰ پس حل معادلات مفروضہ
کا اون معادلات کی حل پر موقوف ہوا جو معادلات مفروضہ سی درجہ کم رکہتی ہیں یا
یہہ ہوسکتا ہی کہ ا کے اجزا ضربی میں سی ایک ب کی اجزا ضربی میں سی کسی ایک کے ساتہہ بالکل مطابق ہو
مثلاً فرض کرو کہ لو اور صو متطابق ہیں تو کوئی سی قیمتیں لا اور ر کی جو مساوات لو = ۰ کی شرائط کو
پورا کرینگے وہ ہمزاد مساوات ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرائط کو بہی پورا کرینگے
پس اگر لو میں لا اور ر دو ملتف ہیں تو ہم مقادیر مجہول میں سی ایک کیواسطی جو قیمت چاہیں

مقرر کرین اور دوسرے قیمت اوسکی مطابق نکال لین اور اسطرح سی جتنی حل چاہین دریافت کرین
گر لو مین ایک مقدار مجہول مقادیر مجہولہ مین سی ملتف ہو تو ہم معادلات
ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرائط کو پورا اوس مقدار مجہول کے اوس قیمت سی کر سکتی ہین
جو مساوات لو = ۰ سی مستنبط ہو اور دوسری مقدار مجہول کی واسطی خواہ کچہ ہی قیمت مقرر کرین

(۲۷۴) ہم نی ابہی بیان کیا ہی کہ دو مقادیر مجہول کی دو مساواتون سی کسطرح مسائل جملہ بالقرینہ کے استعانت سی ہم ایک مجہول مقدار کو دور کرتی ہین اور ایک مساوات دوسرے مقدار مجہول کی حاصل کرتی ہین اب ہم مقدار مجہول کی دور کرنی کی ایک اور ترکیب بیان کرتی ہین وہ دو جبریہ جملون کے وفق اعظم دریافت کرنی کی عمل پر موقوف ہی

(۲۷۵) فرض کرو کہ دو ہمزاد مساواتین ح۱ (لا و ی) = ۰ اور ح۲ (لا و ی) = ۰ سے تعبیر کی جائین اور لا = سہ اور ی = صہ کی ایسی قیمتین ہون کہ اونسی ان مساوات کی شرائط پوری ہوتی ہون تو مساوات ح۱ (لا و صہ) = ۰ اور ح۲ (لا و صہ) = ۰ کی شرائط لا = سہ سی پوری ہونگین اسی معلوم ہوا کہ ح۱ (لا و صہ) و ح۲ (لا و صہ) کا ایک وفق مشترک ہو اور یہہ وفق مشترک ایسا ہو کہ جب اوسکو برابر صفر کی لکہین تو اوسی قیمتین سہ کی ہاتہہ لگ جائین اور نیز وہ قیمت یا قیمتین حاصل ہو جائین جو ی = صہ کی ساتہہ شریک ہو کر معادلات مفروضہ کی شرائط کو پورا کرین

پس فرض کرو کہ ح۱ (لا و ی) اور ح۲ (لا و ی) کی لا کی قوا متنازلہ کی ترتیب سی لکہین اور حسب معمول اوسکا وفق اعظم دریافت کرین اور یہانتک عمل کرین کہ اخر کو ایک جملہ ی کا باقی مین حاصل ہو اوسکا ح (ی) نام رکہو تو کوئی ایسی قیمت ی کی داخل ہونی کی قابل نہین ہو گی جب تک کہ وہ ح (ی) = ۰ کی شرائط نہ کری اسواسطی کہ اگر ح (ی) معدوم نہ ہو تو ح۱ (لا و ی) و ح۲ (لا و ی) کا کوئی وفق مشترک نہین ہونی کا اسواسطی وہ ایک ہی وقت معدوم نہین ہو سکینگے۔ مگر اسکے بالعکس درست نہین کہ ہر ایک قیمت ی جو ح (ی) کو فنا کرتی ہی وہ ضرور داخل ہونی کی قابل ہے

اسواسطی کہ اثنا عمل مین یہہ واقع ہوسکتا ہی کہ بعض قوا لاکی امثال مکسور ہون جنکی نسب نمایون مین ی ملتف ہو اور ایک قیمت جو مساوات مح (ی) = ۰ کی شرایط کو پورا کرتی ہو ان نسب نمایون کو معدوم کردی اور اسطرح سی لاانتہا اور غیرالمعین مقادیر داخل کردی

مثلاً فرض کرو کہ ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

ح۱ (لا و ی) = ق ح۲ (لا و ی) + مح (ی)

پس اگر ق ایک جملہ صحیح ہی تو وہ ی کی کسی محدود قیمت سی غیر متناہی ہوگا اور کوئی قیمت ی کی جو مح (ی) کو معدوم کرتی وہ اوس لا کی قیمت کی ساتھہ شامل ہوکر جو مساوات ح۲ (لا و ی) = ۰ سی موافق اس ی کی قیمت کی نکلتی ہی ح۱ (لا و ی) کو معدوم کریگی لیکن اگر ق کسر ہو اور اوسکی نسب نما مین ی ملتف ہو تو جب مح (ی) معدوم ہو تو ق غیر متناہی ہوسکتا ہے اور کچہ ضرور نہین کہ ح۱ (لا و ی) معدوم ہو جب مح (ی) = ۰ اور ح۲ (لا و ی) = ۰ یہہ صورت شی اوس حالت مین بہی ہوسکتی ہی کہ ہم عمل حسب دستور کرین اور ایسی اجزا ضربی داخل کرین کہ امثال مکسور سی بچ جائین مثلاً فرض کرو کہ ہم ح۱ (لا و ی) کو کسی مقدار س مین ضرب دیتے ہین تاکہ ہم اون امثال مکسور سی بچ جائین جو ی کے جملے ہین اور اب ہم فرض کرتے ہین کہ

س ح۱ (لا و ی) = ق ح۲ (لا و ی) + مح (ی)

اب اگر ی کو مساوات مح (ی) = ۰ سی دریافت کرین اور پہر مساوات ح۲ (لا و ی) = ۰ سے دریافت کرین تو جو قیمت اسطرح حاصل ہونگی وہ ضرور س ح۱ (لا و ی) کو معدوم کرینگے مگر اسی یہہ نہین نکلتا کہ ح۱ (لا و ی) معدوم ہوتا ہے کیونکہ یہہ ہوسکتا ہی کہ جو قیمت ی کی ہم نے لی وہ س کو معدوم کرے

اس سی معلوم ہوا کہ ایک قاعدہ کی ضرورت ہی جسسی یہہ معلوم ہو کہ کون سی حل مساواتون مین داخل ہونی کی قابل ہین اب ہم اوس قاعدہ کو بتلاتی ہین — ہم یہہ فرض کرتی ہین کہ وہ قوت مشترک اعظم کی دریافت کرتی ہین حسب دستور اس باب مین احتیاط کی گئی ہی کہ امثال مکسور نہ واقع ہون

ہم یہہ فرض کر سکتی ہین کہ مساواتین جو ا = ۰ اور ب = ۰ تعبیر کرتے ہین
اونمین نہ ا اور نہ ب مین کوئی جزضربی ایسا واقع ہی کہ وہ صرف ء ہی کا جملہ ہو
کیونکہ ایسا جملہ کا ہم جداگانہ خیال کر سکتی ہین اور جو حل اوسپر موقوف ہون وہ دریافت کر سکتی ہین
جو ترکیب ہم اب لکھتی ہین وہ لابیٹی صاحب اور سارس صاحب نی ایجاد کی تہی اونکو ہم
جو کوئرٹ کے جبر مقابلہ سی نقل کرتی ہین

(۲۷۶) فرض کرو کہ دو ہمزاد مساواتین ا = ۰ اور ب = ۰ سی تعبیر ہوتی ہین اور یہہ بہی ہم فرض کرتی ہین کہ نہ ا ایسا ہی نہ ب ایسی ہی کہ اونمین کوئی جزضربی ایسا واقع ہو کہ وہ صرف ء کا جملہ ہو اور س وہ جزضربی ہی جسکو ا مین اسلئی ضرب دیتی ہین کہ وہ ب پر تقسیم ہو فرض کرو کہ ق خارج قسمت نکلتا ہی اور ر باقی بچتی ہی جسمین ر جملہ صرف ء کا ہی فرض کرو کہ س₁ وہ جزضربی جسکو ب مین اسلئی ضرب دیتی ہین کہ وہ ر پر تقسیم ہو فرض کرو کہ اس تقسیم کرنی مین ق₁ خارج قسمت نکلتا ہی اور ر₁ ر₁ باقی بچتی ہی اور اسمین ر₁ صرف ء کا جملہ ہے اسی طرح عمل کئی جاؤ اور تمثیلاً فرض کرو کہ چوتہی تقسیم پر ہم کو ایک ایسی باقی حاصل ہوتی ہے کہ جسمین لا داخل نہین ہی اور اوسکو ہم ر₃ سی تعبیر کرتی ہین پس مطابقی ذیل ہم کو حاصل ہونگے

س ا = ق ب + ر ر
س₁ ب = ق₁ ر + ر₁ ر₁
س₂ ر = ق₂ ر₁ + ر₂ ر₂ . . . (۱)
س₃ ر₁ = ق₃ ر₂ + ر₃

فرض کرو کہ د₁ وفق اعظم س₁ اور ر کا ہی اور د₂ وفق اعظم (س س₁)/(د₁) اور ر₂ کا ہے اور د₃ وفق اعظم (س س₁ س₂)/(د₁ د₂) اور ر₂ کا ہی اور د₃ وفق اعظم (س س₁ س₂ س₃)/(د₁ د₂ د₃) اور ر₃ کا ہے
اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کے حل ان نظمون کے حل کرنے سے حاصل ہونگے

ر/د = ۰ اور ل = ۰
ر۱/د۱ = ۰ اور ر = ۰
ر۲/د۲ = ۰ اور ر۱ = ۰ . . . . . . (۲)
ر۳/د۳ = ۰ اور ر۲ = ۰

اول ہی ہم یہہ ثابت کرتی ہین کہ تمام حل جو معادلات (۲) سی حاصل ہونگی اونسی معادلات ا = ۰ اور ل = ۰ کی شرائط پوری ہونگین اور دویم ہم یہہ ثابت کرینگے کہ تمام قیمتین جو لا اور ر کی معادلات لا = ۰ اور ل = ۰ کی شرائط کو پورا کرتی ہین وہ نظم (۲) کے حلوں مین داخل ہونگین

اول متطابقہ (۱) کے دونو ارکان کو د پر تقسیم کرو تو

س/د ا = ق/د ل + ر/د ر (۳)

اب بموجب فرض کی س/د اور ر/د دونو جملی صحیحہ کی ہین پس ق ل/د بہی جملہ صحیحہ ہوا لیکن بموجب فرض کی ل کا کوئی جز ضربی ایسا نہین ہی کہ وہ فقط د ہی کا جملہ ہو اسواسطے ق کو د پورا تقسیم کرتا ہے

متطابقہ (۳) سی ثابت ہوتا ہی کہ لا اور ر کی قیمتین جو معادلات ر/د = ۰ اور ل = ۰ کی شرائط کو پورا کرتی ہین وہ س/د ا کو معدوم کرتے ہین لیکن س/د اور ر/د بموجب فرض کے کوئی جز ضربی رکہتی نہین اسلئی یہہ قیمتین ا کو بہی معدوم کرتی ہین پس اسی معلوم ہوا کہ معادلات ر/د = ۰ اور ل = ۰ کی تمام حل معادلات ا = ۰ اور ل = ۰ کی شرائط کو پورا کرتے ہین

اب پہر متطابقہ (۳) کی دو ارکان کو س۱ مین ضرب دو اور متطابقہ (۱) کے دوسرے مساوات سی س۱ ل کا مساوی لبر حاصل ہو اوسکو س۱ ل کی جگہ رکہی تو

س س۱/د ا = (س۱ ر + ق ق۱)/د ر + ق/د ر۱

جملہ (س۱ ر + ق ق۱)/د ایک صحیح جملہ ہی اسواسطی کہ ر اور ق پوری تقسیم د پر ہوتی ہین اور علاوہ برین یہہ جملہ د۱ پر بہی پورا تقسیم ہوتا ہی اسواسطے کہ س س۱/د ا کو د تقسیم کرتا ہے

اور ر کو س، پورا نہین تقسیم کرتا ہی د، پر تقسیم کرو اور اختصاراً بجای $\frac{ق}{د}$ کے

م، اور $\frac{س، ر + ق ق،}{د د،}$ کے م، ر رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{س س، ا}{د د،} = م، ر + \frac{ر،}{د،} م ر، \qquad (۴)$$

اب (۱) کے متطابقون مین دوسرے کی دونو ارکان کو $\frac{س}{د}$ مین ضرب دو تو

$$\frac{س س، ب}{د} = \frac{س ق،}{د} ا ر + \frac{س}{د} ر، ر،$$

چونکہ د، تقسیم $\frac{س س،}{د}$ اور ر، کو کرتا ہی تو وہ $\frac{س ق،}{د}$ ر کو بھی تقسیم کریگا لیکن ر پورا

م پر نہین تقسیم ہوتا ہی اسواسطی $\frac{س ق،}{د}$ پورا تقسیم ہونا چاہیئے د، پر تقسیم کرو اور اختصاراً $\frac{س}{د}$ کی جگہ

ن اور $\frac{س ق،}{د د،}$ کے جگہ ن، رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{س س،}{د د،} ب = ن، ر + \frac{ر،}{د،} ن ر، \qquad (۵)$$

(۴) اور (۵) متطابقون سی یہہ ثابت ہو کہ تمام قیمتین جو ا اور ر کی $\frac{ر،}{د،}$ اور ر کو

معدوم کرتی ہین وہ $\frac{س س،}{د د،}$ ا اور $\frac{س س،}{د د،}$ ب کو فنا کرتی ہین لیکن $\frac{س س،}{د د،}$ اور $\frac{ر،}{د،}$ مین کوئی

جز ضربی مشترک نہین اسواسطے تمام حل معادلات $\frac{ر،}{د،} = ۰$ اور ر = ۰ بمساوات ا = ۰ اور ب = ۰

کی شرائط کو پورا کرتے ہین

اب متطابقہ (۴) کی دونو ارکان کو س۲ مین ضرب دو اور س۲ ر کی جگہ اوسکا مساوی لیں

جو (۱) کے متطابقون مین سی تیسری متطابقہ سی حاصل ہو (۱) مین رکھو تو

$$\frac{س س، س۲ ا}{د د،} = (ق۲ م، + \frac{س۲ ر،}{د،} م) ر، + ر۲ م، ر۲$$

بموجب فرض کی د۲ اول رکن کو اس متطابقہ کے تقسیم کرتا ہے اور د ر۲ کو بھی

تقسیم کرتا ہی اسواسطے (ن۲ م، + $\frac{س۲ ر،}{د د،}$ م) پورا د۲ پر تقسیم ہوگا اس خارج قسمت کو م۲

سے تعبیر کرو تو

$$\frac{س س، س۲}{د د، د۲} ا = م۲ ر، + \frac{ر۲}{د۲} م، ر۲ \qquad (۶)$$

اب متطابقہ (۵) کے دونو ارکان کو س۲ مین ضرب دو اور س۲ ر کی جگہ اوسکا

مساوی لہجو (۱) کے متطابقون مین تیسری سی نکلے درج کرو تو

$$\frac{\text{س س}_1\text{ س}_2}{\text{د د}_1}\text{ ب} = (\text{ق}_2\text{ ن}_1 + \frac{\text{س}_2\text{ ر}_1}{\text{د}_1}\text{ ن})\text{ ر}_2 + \text{ر}_2\text{ ن}_1\text{ ر}_2$$

موافق سابق کی ہم ثابت کر سکتی ہین کہ ر۱ کے امثال پوری د۲ پر تقسیم ہوتی ہین اور اس خارج قسمت کو ف۲ سی تعبیر کرتے ہین تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{س س}_1\text{ س}_2}{\text{د د}_1\text{ د}_2}\text{ ب} = \text{ن}_2\text{ ر}_1 + \frac{\text{ر}_2}{\text{د}_2}\text{ ن}_1\text{ ر}_2 \qquad (۷)$$

اب (۶) (۷) متطابقون سی ثابت ہوتا ہی کہ تمام قیمتین لا اور ر کی جو $\frac{\text{ر}_2}{\text{د}_2}$ اور ر۱ کو معدوم کرتی ہین وہ ان متطابقون کی اول رکن کو بہی معدوم کرتی ہین لیکن $\frac{\text{س س}_1\text{ س}_2}{\text{د د}_1\text{ د}_2}$ اور $\frac{\text{ر}_2}{\text{د}_2}$ کا کوئی جز ضربی نہین ہی اور اسیواسطے تمام حل معادلات $\frac{\text{ر}_2}{\text{د}_2} = ۰$ اور ر۱ = ۰ کی شرائط کو پورا کرتی ہین وہ معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرائط کو بہی پورا کرتی ہین

اب اسیطرح موافق سابق کی (۶) اور (۷) متطابقون کو س۳ مین ضرب دیتی ہین س۳ ر۱ کی جگہ اوسکا مساوی لہجو (۱) کی متطابقون مین چوتہی سی نکلی درج کرتی ہین تو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{س س}_1\text{ س}_2\text{ س}_3}{\text{د د}_1\text{ د}_2\text{ د}_3}\text{ ا} = \text{م}_3\text{ ر}_2 + \frac{\text{ر}_3}{\text{د}_3}\text{ م}_2 \qquad (۸)$$

$$\frac{\text{س س}_1\text{ س}_2\text{ س}_3}{\text{د د}_1\text{ د}_2\text{ د}_3}\text{ ب} = \text{ن}_3\text{ ر}_2 + \frac{\text{ر}_3}{\text{د}_3}\text{ ن}_2 \qquad (۹)$$

اسمین م۳ اور ن۳ جملی صحیح لا اور ر کے ہین اب متطابقی (۸) اور (۹) سی ثابت ہوتا ہے کہ تمام حل معادلات $\frac{\text{ر}_3}{\text{د}_3} = ۰$ اور ر۲ = ۰ معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کی حل ہین

اب ہم نی اپنی دعوی کا اول جزو ثابت کر دیا یعنی تمام حل جو نظم معادلات (۲) سی حاصل ہوتے ہین وہ معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرائط کو پورا کرتے ہین

اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ تمام قیمتین جو معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرائط کو پورا کرتی ہین وہ نظم (۲) کے جملون مین موجود ہوتی ہین متطابقہ (۳) کو اسطرح لکہ سکتی ہین کہ

$$\text{ن ا} - \text{م ب} = \frac{\text{ر}}{\text{د}}\text{ ر} \qquad (۱۰)$$

(۴) کو ب مین اور (۵) کو ا مین ضرب دو اور تفریق کرو تو

(م۱ ب − ن۱ ا) ر + (م ب − ن ا) ر/د ر۱ = ۰

اور اسیواسطی بموجب (۱۰) کے

(م۱ ب − ن۱ ا) ر − ر ر۱/د د۱ ر ر۱ = ۰

اور اسیواسطے

م۱ ب − ن۱ ا = ر ر۱/د د۱ ر۱ (۱۱)

(۶) کو ب مین اور (۷) کو ا مین ضرب دو اور تفریق کرو تو

(م۲ ب − ن۲ ا) ر۱ + (م۱ ب − ن۱ ا) ر۲/د۲ ر۲ = ۰

اور اسیواسطی بموجب (۱۱) کے

(م۲ ب − ن۲ ا) ر۱ + ر ر۱ ر۲/د د۱ د۲ ر۱ ر۲ = ۰

اور اسیواسطی م۲ ب − ن۲ ا = − ر ر۱ ر۲/د د۱ د۲ ر۲ (۱۲)

اور علی ہذالقیاس (۸) اور (۹) سی ہم یہہ مستنبط کرتے ہین کہ

م۳ ب − ن۳ ا = ر ر۱ ر۲ ر۳/د د۱ د۲ د۳ (۱۳)

منداالبقہ (۱۴) بتلا رہاہی کہ تمام قیمتین لا اور ر کی جو ا اور ب کو معدوم کرتے ہین وہ ر ر۱ ر۲ ر۳/د د۱ د۲ د۳ کو بھی معدوم کرتی ہین پس اجزا ضربی ر/د اور ر۱/د۱ اور ر۲/د۲ اور ر۳/د۳ مین ضرور ایک معدوم ہوگا اسی معلوم ہواکہ معادلات

ر/د = ۰ اور ر۱/د۱ = ۰ اور ر۲/د۲ = ۰ اور ر۳/د۳ = ۰

سے تمام قیمتین ر کی جو داخل ہونی کی قابل ہین انضرام پاتے ہین

پس فرض کرو کہ لا = سہ اور ر = صہ قیمتین ہین جو معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرائط کو پورا کرتی ہین

اول فرض کرو کہ صہ ایک قیمت مساوات ر/د = ۰ کی ہی تو یہہ ظاہر ہی کہ قیمتین لا = سہ

اور ی = صہ معادلات ر/د = ۰ اور ر = ۰ کی شرایط کو پورا کرینگی

دوم فرض کرو کہ صہ قیمت مساوات ر/د = ۰ کی نہیں ہے لیکن وہ قیمت مساوات ر۱/د۱ = ۰ کی ہے

چونکہ ی = صہ سی ر/د معدوم نہین ہوتا تو (۱۰) سے یہہ مستنبط ہوتا ہے کہ

قیمتیں لا = سہ اور ی = صہ کی ر۱ کو فنا کرتی ہین تو وہ معادلات ر۱/د۱ = ۰ اور ر۱ = ۰

کی شرایط کو پورا کرتی ہین

دوم فرض کرو کہ صہ قیمت مساوات ر/د = ۰ کی نہین ہی اور ر۱/د۱ = ۰ کی بہی نہین ہے

بلکہ وہ قیمت مساوات ر۲/د۲ = ۰ کی ہی چونکہ ر/د ر۱/د۱ جب ی = صہ کے ہو فنا نہین ہوتے

تو (۱۱) سی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ قیمتین لا = سہ اور ی = صہ کی ر۲ کو معدوم کرتی ہین

اس سبب سی وہ معادلات ر۲/د۲ = ۰ اور ر۲ = ۰ کی شرایط کو پورا کرتی ہین

اب فرض کرو کہ صہ قیمت ان معادلات ر/د = ۰ اور ر۱/د۱ = ۰ اور ر۲/د۲ = ۰ مین سی کسی ایک کی

بہی نہین ہی بلکہ وہ مساوات ر۳/د۳ = ۰ کی ایک قیمت ہی چونکہ ر/د ر۱/د۱ ر۲/د۲ معدوم نہین ہوتے

جب کہ ی = صہ کے ہو تو (۱۲) سی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ

قیمتین لا = سہ اور ی = صہ معدوم ر۳ کو کرتے ہین اور وہ معادلات ر۳/د۳ = ۰

اور ر۳ = ۰ کی شرایط کو پورا کرتے ہین

اسی دوسرا جزو دعوی کا ثابت ہوتا ہی مساوات ر/د ر۱/د۱ ر۲/د۲ ر۳/د۳ = ۰

جسی تمام قیمتین ی کی جو داخل ہونے کی قابل ہین حاصل ہوتی ہین اسلئی اسکو آخری مساوات کہتی ہین

(۲۷۹) مثالین

(۱) لا۳ + ۳ی لا۲ + (۳ی۲ − ی + ۱) لا + ی۳ − ی۲ + ۲ی = ۰

لا۲ + ۲ی لا + ی۲ − ی = ۰

یہان لا + ۲ی باقی اول ہی پس ر = ۱ اور ی۲ − ی دوسری باقی ہے

جو لا سی کچہ لگاؤ نہین رکہتی تو صرف وہی حل ہین جو ر۱/د۱ = ۰ اور ر۱ = ۰

یعنی جو د^۲ − د = ۰ اور لا + ۲د = ۰ سی حاصل ہوتے ہین

(۲) لا^۳ + ۳د لا^۲ + ۲د (د − ۲) لا + د^۲ − ۴ = ۰

لا^۲ + د لا + ۲د^۲ − ۵د + ۲ = ۰

یہان اول باقی (د − ۲) (لا + د + ۲) ہے پس ر = د − ۲ اور
ر = لا + د + ۲ اور دوسری باقی د^۲ − ۵د + ۶ ہی اور اسکو کچھہ لگاؤ لا سی نہین ہے
پس تمام حل وہ ہین جو ب/ر = ۰ اور ب = ۰ یعنی د − ۲ = ۰ اور لا^۲ + ۲د لا + ۲د^۲ − ۵د + ۲ = ۰
سے انصرام پاتے ہین اور جو ر/ر۱ = ۰ اور ر = ۰ یعنی د^۲ − ۵د + ۶ = ۰
اور لا + د + ۲ = ۰ سے سرانجام پاتے ہین

اور آخری مساوات د کی (د − ۲) (د^۲ − ۵د + ۶) = ۰

(۳) لا^۳ + ۳د لا^۲ − ۳ لا^۲ + ۳د^۲ لا − ۶د لا − لا + د^۳ − ۳د^۲ − د + ۳ = ۰

لا^۳ − ۳د لا^۲ + ۳ لا^۲ + ۳د^۲ لا − ۶د لا − لا − د^۳ + ۳د^۲ + د − ۳ = ۰

باقی اول ۲ (د − ۱) (۳ لا^۲ + د^۲ − ۲د − ۳) ہی اور باقی دوم ۸ (د^۲ − ۲د) لا ہے
اور تیسری باقی د^۲ − ۲د − ۳ ہی پس تمام حل وہ ہین جو ان مساواتون سی انصرام پائی ہین
د − ۱ = ۰ اور لا^۳ − ۳د لا^۲ + ۳ لا^۲ + ۳د^۲ لا − ۶د لا − لا − د^۳ + ۳د^۲ + د − ۳ = ۰ سی
اور د^۲ − ۲د = ۰ سی اور ۳ لا^۲ + د^۲ − ۲د − ۳ = ۰ سے
اور د^۲ − ۲د − ۳ = ۰ اور لا = ۰ سے
اور د کی آخری مساوات یہہ ہی کہ (د − ۱) (د^۲ − ۲د) (د^۲ − ۲د − ۳) = ۰

(۴) (د − ۲) لا^۲ − ۲ لا + ۵د − ۲ = ۰

د لا^۲ − ۵ لا + ۴د = ۰

اب ہم دائین طرف کی رکن کو اول جملہ کے د مین ضرب دیتے ہین تا کہ تقسیم بغیر امثال مکسور
کے ممکن ہو پس س = د اور باقی اول (۳د − ۱۰) لا + د^۲ + ۶د اب عمل تقسیم کے

جاری رہنی کے واسطی ہم $\text{ی}\,\text{لا}^2-5\,\text{لا}+4\text{ی}$ کو $3\text{ی}-10$ مین ضرب دیتے ہین اور اوسپر عمل ذیل کرتے ہین

$$(3\text{ی}-10)\text{لا}+\text{ی}^2+6\text{ی}\Big\}\,(3\text{ی}-10)\text{ی}\,\text{لا}^2-(3\text{ی}-10)5\,\text{لا}+(3\text{ی}-10)4\text{ی}\,\Big\{\,\text{ی}\,\text{لا}$$

$$\frac{(3\text{ی}-10)\text{ی}\,\text{لا}^2+(\text{ی}^2+6\text{ی})\text{ی}\,\text{لا}}{-(\text{ی}^3+6\text{ی}^2+15\text{ی}-5)\text{لا}+12\text{ی}^2-40\text{ی}}$$

اب ہم کیا تو اس اخر سطر کی رقموں کو باقی شمار کرین یا اگے تقسیم جاری کرین کیونکہ اوسمین لا کا درجہ مقسوم علیہ سی کم نہین ہی اگر ہم دوسری تجویز کو اختیار کرین تو $3\text{ی}-10$ مین پہر ضرب دین تو اوسی وہی باقی حاصل ہوگی جو پہلی ہی اصل کو $(3\text{ی}-10)^2$ کے ضرب دینی سے حاصل ہوتی پس عمل کو اسطرح جاری کرین

$$\text{ی}^3+6\text{ی}^2+15\text{ی}-50 \;\Big|\; -(\text{ی}^3+6\text{ی}^2+15\text{ی}-50)\text{لا}+(12\text{ی}^2-40\text{ی})(3\text{ی}-10)\Big\}\,(3\text{ی}-10)\text{لا}+\ldots-(\text{ی}^3+6\text{ی}^2+15\text{ی}-50)$$

$$\frac{-(\text{ی}^3+6\text{ی}^2+15\text{ی}-50)(3\text{ی}-10)\text{لا}-(\text{ی}^3+6\text{ی}^2+15\text{ی}-50)(\text{ی}^2+6\text{ی})}{\text{ی}^5+12\text{ی}^4+87\text{ی}^3-200\text{ی}^2+100\text{ی}}$$

یہان ایک باقی لا سی بالکل بی تعلق ہی اور یہہ قیمت ر_1 کی ہی اور یہان $\text{د}_1=\text{ی}$ پس حل وہ ہین جو ان مساواتون سی انصرام پاتے ہین کہ

$$\text{ی}^4+12\text{ی}^3+87\text{ی}^2-200\text{ی}+100=0 \quad \text{اور} \quad (3\text{ی}-10)\text{لا}+\text{ی}^2+6\text{ی}=0$$ (۹)

(۲۷۸) دفعہ ۲۷۶ کی عمل کی نسبت ہم ان باتون کو کہہ سکتی ہین کہ

(۱) ہم ہمیشہ س اور ر کو ایسا فرض کرتی ہین کہ اونمین کوئی جز ضربی مشترک نہو اسواسطے کہ اگر وفق اعظم س اور ر کا ہو تو تقسیم ل_1 کی ب پر تعبیر امثال مکسور کے داخل ہوتی کی ہو جائیگی جیسا کہ مطابقہ (۳) سی ظاہر ہی پس س نہایت سادہ جز ضربی نہین جو مضروب فیہ ا کا پہلی ب پر تقسیم کرنی سی بنا ہی اسی معلوم ہو کہ نہایت سادہ جز ضربی فرض کرنی سی ہم $\text{د}=1$ کے بناتے ہین

اور علی ہذا القیاس س_1 اور س_2 ... ایسی ہین کہ س_1 اور ر_1 کا کوئی جز ضربی مشترک نہین ہے

اور س۱ اور ر۲ کا کوئی جز ضربی مشترک نہیں ہے

اسی معلوم ہوا کہ ہم تمام س و س۱ و س۲ و س۳ … ایسا مقرر کر سکتی ہیں کہ د = ۱

اور د۱ وفق اعظم س اور ر۱ کا ہو اور د۲ وفق اعظم $\frac{س س_۱}{د_۱}$ اور ر۲ کا اور د۳

وفق اعظم $\frac{س س_۱ س_۲}{د_۱ د_۲}$ اور ر۳ کا اور علی ہذا القیاس

دوم فرض کرو کہ جو لاسی بی لگاتار باقی فرض کی گئی ہیں وہ برابر صفر کی ہی تو ر۲ وفق مشترک

ا اور ب کا ہوا اسی معلوم ہوا کہ حل معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کے

(۱) لا اور ی کے بی شمار قیمتوں پر جو مساوات واحد ر۲ = ۰ سی مستنبط ہوتی ہیں

شامل ہیں (۲) معادلات $\frac{ا}{ر_۲}$ = ۰ اور $\frac{ب}{ر_۲}$ کے حل کرنی سی جو لا اور ی کے قیمتیں

محدود حاصل ہوتی ہیں ان پر شامل ہیں لیکن اس سبب سی کہ ر۳ = ۰ تو

(۱) کی منطابقون سی بموجب دفعہ ۲۷۶ کے مستنبط ہوتا ہی کہ ر۲ تقسیم ر اور ر۱ پر ہوتے ہیں

اب منطابقون (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) (۱۰) (۱۱) (۱۲) کو بموجب دفعہ ۲۷۶ کے

ر۲ پر تقسیم کرو تو جدید منطابقی حاصل ہونگی جنمین ا و ب و ر و ر۱ اور ر۲ بجای $\frac{ا}{ر_۲}$ و $\frac{ب}{ر_۲}$

و $\frac{ر}{ر_۲}$ و $\frac{ر_۱}{ر_۲}$ و $\frac{ر_۲}{ر_۲}$ کی رکھی گئی ہیں بوساطت ان منطابقون کے ہم ثابت کر سکتی ہیں کہ

تمام حل معادلات $\frac{ا}{ر_۲}$ = ۰ اور $\frac{ب}{ر_۲}$ = ۰ ان نظمون کے حل کرنی سی حاصل ہوتی ہیں کہ

$\frac{ر_۲}{د}$ = ۰ اور $\frac{ب}{ر_۲}$ = ۰

$\frac{ر}{د_۱}$ = ۰ اور $\frac{ر}{ر_۲}$ = ۰

$\frac{ر_۲}{د_۲}$ = ۰ اور $\frac{ر_۱}{ر_۲}$ = ۰

مثلاً فرض کرو کہ

$لا^۳ + ی لا^۲ - (ی^۲ + ۱) لا + ی - ی^۳ = ۰$

اور $لا^۳ - ی لا^۲ - (ی^۲ + ۶ی + ۹) لا + ی^۳ + ۶ی^۲ + ۹ی = ۰$

تقسیم اولین سی باقی کی واسطی $۲ \{ ی لا^۲ + (۳ی + ۴) لا - (ی^۳ + ۳ی^۲ + ۴ی) \}$

حاصل ہوتا ہے پس

ر = ی لا۲ + (۳ی۲ + ۴) لا - (ی۳ + ۳ی۲ + ۴ی)

اب تقسیم دوم کرنی کے واسطے مقسوم کو ی مین اور تقسیم کے اول مرحلہ کے بعد پھر ی مین ضرب دو تا کہ تقسیم جاری رہی باقی ر ا ر کے واسطے ۸ (ی۲ + ۳ی + ۲) (لا - ی) حاصل ہوگا اب ر کو لا - ی پر تقسیم کرو تو خارج قسمت ی لا + ی۲ + ۳ی + ۴ ہوگا اور اب کوئی باقی نہین ہے

پس معادلات مفروضہ کی حل (۱) مساوات واحد لا - ی = ۰ سی جو بی شمار قیمتین لا اور ی کی حاصل ہوتی ہین اون پر شامل ہین (۲) اور ان محدود حلون پر شامل ہین جو ان معادلات کی حل کرنے سے حاصل ہوتی ہین کہ

ی۲ + ۳ی + ۲ = ۰ اور ی لا + ی۲ + ۳ی + ۴ = ۰

سوم دفعہ ۲۷۶ کا ثبوت فرض کرتا ہی کہ لا اور ی محدود ہین مگر یہہ ممکن ہے کہ ایک مساوات کی حل بی شمار ہون مثلاً فرض کرو کہ (ی - ۱) لا۲ - ۲ لا + ی۲ = ۰ پس جب تک کہ ی برابر واحد کے نہ ہو تو اس مساوات درجہ دوم سی دو محدود قیمتین انصرام پاتی ہین اگر ی نہایت قریب اکی ہوتا ہے تو ایک قیمت لا کی بی نہایت زیادہ ہوتی ہی بائیسوان باب جبر مقابلہ کا دیکھو

پس جب ی = ۱ تو ہم کہتے ہین کہ لا کی لا انتہا قیمتین ہین

ہم نی دفعہ ۲۷۶ کی تحقیقات مین ایسی لا اور ی کی غیر محدود قیمتین نہین فرض کی ہین اون پر علیحدہ بحث ہوسکتی ہی مثلاً اگر ہم یہہ تحقیق کرنا چاہین کہ لا کی ایک قیمت غیر محدود داخل ہونی کی قابل ہی تو ہم ۱/لا' بجای لا کی رکھین اور مساوات کو کسر سی خالص کرین اور فرض کرین کہ لا' = ۰ تو اب ہم کو دو مساواتین ی کی حاصل ہونگین اور اگر اونکی ایک قیمت یا کئی قیمتین مشترک ہونگین تو اس قیمت یا ان قیمتون کو مع غیر محدود قیمت لا کے معادلات مفروضہ کی شرائط کا پورا کرنی والا

تئیسوان باب ایک جملہ کا سلسلہ مین پھیلانا

(۲۷۹) فرض کرو کہ ایک مساوات ایسی ہی کہ اوسمین دو مقادیر مجہول لا اور ی مخلوط ہین پس اگر ہم مساوات کو حل کر کی قیمتین ی کی لا کی رقمون مین دریافت کر سکین تو ی کی ایک قیمت کو سلسلہ قوای لا مین معلوم کر سکینگی اور اب ہم ی کی قیمتون کی پہلائی کی ایک ترکیب لکھتی ہین اور اسی پہلی ی کی قیمتین محدود رقمون مین نہین دریافت کرینگی

اس ترکیب کو لاگرانش نی ایجاد کیا تہا نیوٹن صاحب کا جو متوازی الاضلاع مشہور ہے اوسمین بہی اس عمل کا بیان ہوا ہی جس کسی کو اس مسئلہ کا مفصل حال دریافت کرنا ہو کہ وہ کس طرح ایجاد ہوا اور کسنے ایجاد کیا تو وہ پروفیسر ڈی مورگن صاحب کی تحریر کو اس باب مین دیکھین

(۲۸۰) فرض کرو کہ مساوات

ا ی^س + ب ی^ص + . . . + ک ی^کد + . . . + ص ی^قد = ۰

سے تعبیر ہوتی ہی اسمین ا ب . . . ک . . . ص تمام جملی لاکے ہین اور ہم فرض کرتی ہین کہ سہ و صہ . . . کد . . . بہ ترتیب تنازلی مقادیر جبریہ کی لکھی ہوئی ہین اور تمام تحقیقات جہان سے ہم نے بڑا یا بہت بڑا یا چھوٹا یا بہت چھوٹا مقادیر کو لکھا ہے وہان اونکی معنی جبریہ لئے ہین

فرض کرو کہ ا ا درجہ کا یعنی لا اسی کوئی بڑی قوت لا کی ا مین نہین واقع ہوتی اور ب ب درجہ کا ہی . . . ک ک درجہ کا اور . . . ص ص درجہ کا

بالفعل ہمارا بڑا مطلب یہہ ہے کہ دفعہ ذیل کے مسئلہ کو حل کرین

(۲۸۱) مطلب ہمارا ہی کہ وہ سب طریقی دریافت کرین جنکی موافق قیمت ط کی ایسی دریافت کر سکین کہ سلسلہ ارقام ذیل مین دو یا زیادہ رقمین برابر یا بڑی باقی رقمون مین سی کسی ایک رقم سی ہون

ا + سہ ط ب + صہ ط . . . ک + کد ط . . . ص + قد ط

اول ط کو فرض کرو کہ + ص ہی تو اول رقم باقی ارقام مین سی ہر یک سی بڑی ہوگی اور جب ط گہٹتی ہے تو ہر یک رقم گہٹتی ہی لیکن ہر یک بہ نسبت اپنی ماقبل کے رقم زیادہ

اہستہ کم ہوتی ہی فرض کرو کہ ط کی وہ قیمت ہی کہ ا + سہ ط اول برابر ارقام مابعد مین سی ایک یا کئی ایک کے برابر ہوا اور یہہ قیمت اسطرح حاصل ہوگی کہ معادلات ذیل مین سی ط کی سب سے بڑی قیمت دریافت کرین

ا + سہ ط = ب + صہ ط اور ا + سہ ط = س + لر ط . . . ا + سہ ط = ک + کد ط . . . ا + سہ ط = ص + قد ط

یعنی بڑی قیمت ط کی اس سلک ذیل سے دریافت ہوگی کہ

(ب − ا) / (سہ − صہ) ، (س − ا) / (سہ − لر) . . . . (ک − ا) / (سہ − کد) . . . . (ص − ا) / (سہ − قد)

فرض کرو کہ (ک − ا) / (سہ − کد) ان قیمتوں مین سب سی بڑی قیمت ہی اگر ایک قیمت بڑی دوسری سی ہے یا اگر کئی ایک برابر اور بڑی باقی مین سی بہ نسبت کسی کے ہو تو (ک − ا) / (سہ − کد) کو اونمین اخر فرض کرو اور (ک − ا) / (سہ − کد) کو مر سے تعبیر کرو

فرض کرو کہ ط کم مر سی ہوتا جاتا ہی یہانتک کہ ک + کد ط اول برابر ایک یا کئی ایک کے ارقام مابعد مین سی ہوا ہی قیمت ط کی موافق سابق کی معادلات ذیل مین ط کی سب سے بڑی قیمت لیبی سے دریافت ہوسکتی ہے

ک + کد ط = ل + لر ط و ک + کد ط = م + لب ط . . . ک + کد ط = ص + قد ط

یعنی سب سی بڑی قیمت اس سلک مین سی لینی چاہیئے کہ

(ل − ک) / (کد − کر) و (م − ک) / (کد − لب) . . . . (ص − ک) / (کد − قد)

فرض کرو لا انہین سی سب سی بڑی قیمت منتخب کی جاے اگر ایک قیمت بڑی بہ نسبت کسی اور کی ہو یا کئی ایک بڑی بہ نسبت اوروں کی ہو تو اونمین سی سب سے اخر رقم منتخب کیجائی فرض کرو کہ مر قیمت اس منتخب رقم کی ہی جو (ن − ک) / (کد − قد) فرض کیجائی

فرض کرو کہ ط پہر کم لر سی ہوتی جای اور موافق سابق کی عمل کر کی مر کو معادلات ذیل سے دریافت کرو

ن + سد ط = ع + بد ط . . . . ن + سد ط = ص + قد ط

یہی عمل جاری رہی جب تک کہ رقم ص + قد ط قیمت ط کی دریافت کرنے کیلئے کام ائی

پس اسی ہم دیکھتی ہیں کہ ط کی تمام مناسب قیمتین دریافت ہوگئیں

(۲۸۲) اب فرض کرو کہ $\text{ا} = \text{لا}^{\text{ا}}(\text{ا}_1 + \text{ا}_1)$ اسمین ا_1 بے لگاؤ لا سی ہی اور ا_1 جب لا لانہایت ہو معدوم ہوجائیگا اور اسیطرح فرض کرو کہ $\text{ب} = \text{لا}^{\text{ب}}(\text{ب}_1 + \text{ب}_1)$ اور علی ہذا القیاس فرض کرو $\text{ی} = \text{لا}^{\text{ی}}(\text{و} + \text{ی})$ اسمین و بے لگاؤ لا سی ہی اور جب لا لانہایت ہوتا ہی تو ی معدوم ہوتا ہی پس مساوات مفروضہ کو جسمین لا اور ی ملتف ہیں یہہ قیمتیں مندرج کرو تو

$$\text{لا}^{\text{ا}+\text{سط}}(\text{ا}_1+\text{ا}_1)(\text{و}+\text{ی})^{\text{س}} + \text{لا}^{\text{ب}+\text{صط}}(\text{ب}_1+\text{ب}_1)(\text{و}+\text{ی})^{\text{ص}} + \dots$$

$$\dots + \text{لا}^{\text{ک}+\text{کط}}(\text{ک}_1+\text{ک}_1) + (\text{و}+\text{ی})^{\text{ک}} + \text{لا}^{\text{ص}+\text{قط}}(\text{ص}_1+\text{ص}_1)(\text{و}+\text{ی})^{\text{ق}} = 0$$

چونکہ یہہ مساوات لا کی سب قیمتوں پر حاوی ہی اسلئی وہ لا کی لانہایت قیمت پر بھی حاوی ہوگا اور یہہ صورت نہیں واقع ہوتی کی اگر لا کی سب سی اعلی قوت صرف ایک قسم مین ہی واقع ہو اس مطلب کو یون بھی بیان کرسکتی ہین کہ مجموعہ امثال لا کی اعلی قوت کا معدوم ہو پس یہی بات ہی جسکی سبب سے تحقیقات دفعہ گذشتہ کا استعمال ہوسکتا ہے

بموجب فرض کی مرسب سی بڑی قیمت ط کی ہے جو داخل ہوسکتی ہی اور مساوات بالا کی دائین طرف جو جملہ کا حصہ ایسا لکھا ہی کہ جسمین لا کی اعلی قوت ملتف ہی یہہ ہے کہ

$$\text{لا}^{\text{ا}+\text{سم}}\left\{(\text{ا}_1+\text{ا}_1)(\text{و}+\text{ی})^{\text{س}} + \dots + (\text{ک}_1+\text{ک}_1)(\text{و}+\text{ی})^{\text{ک}}\right\}$$

جب لا لانہایت ہو تو امثال $\text{لا}^{\text{ا}+\text{سم}}$ معدوم ہوتی ہے اس بات سی یہہ مساوات و کی قیمت دریافت کرنے کے واسطی حاصل ہوتی ہے کہ

$$\text{ا}_1\text{و}^{\text{س}} + \dots + \text{ک}_1\text{و}^{\text{ک}} = 0$$

اس مساوات سی و کی قیمتیں دریافت ہونگیں اور پہر و کی قیمت کی موافق ی کی قیمت حاصل ہوگی جسمین رقم لا کی اعلی قوت رکھنی والی و لا^م ہوگی

اور اسی طرح سی مر پر قیاس کر کے مساوات ذیل و کے تحقیق کرنی کے واسطی حاصل ہوگی کہ

$$\text{ک}_1\text{و}^{\text{ک}} + \dots + \text{ن}_1\text{و}^{\text{ن}} = 0$$

اس مساوات سے سی قیمتین لو کی دریافت ہوسکتی ہین اور لو کی ہر قیمت کی موافق ی کی ہر ایک قیمت دریافت ہوگی

جسمین رقم اعلی قوت لا کی رکہنی والی لو لاٗ ہوگی

پس اسطرح عمل کرنے سی ہم ی کی ہر قیمت مین اعلی قوت لا کی دریافت کرسکتے ہین

اب پہر ط اور لو کی متناظر قیمتون کا ایک زوج مستحصلہ کام مین لاؤ اور

ی = لاٗ (لو + لو) اور ی کی اس قیمت کو اصل مساوات مین جسمین لا اور ی ملتف ہین

مندرج کرو تو اسطرح ایک مساوات حاصل ہوگی کہ جسمین لا اور لو اور مقادیر معلومہ متعلق ہونگین

اب وہ ترکیب کام مین لائین جسی کہ لو کی قیمتون مین لا کی اعلی قوتین دریافت ہون

پس اسطرح سی دوسری رقمین ی کی قیمتون کی صورت مفصلہ کی سلسلہ کی دریافت ہونگین

جسمین لا کی قوتون مین ترتیب تنازلی ہوگی اور اس عمل کو جہان چاہین جاری رکہین

(۲۸۳) ترکیب مذکورہ کا اقتضا یہہ نہین ہی کہ قوت سہ دصہ ... قد ہوا دب ... ص

اعداد صحاح ہون مگر اس کتاب مین جس قسم کی مساواتون کا ذکر ہی اونکی اول رقمون کی دریافت کرنی مین

جب اس ترکیب کا استعمال کرینگے تو وہ اعداد صحاح ہونگی

اب ہم اس ترکیب کا استعمال ایک مثال مین کرتے ہین

فرض کرو کہ یہہ مساوات ہو کہ

ی۳ (لا۲ − ۳ لا) + ی۲ (لا۳ + ۲ لا۲) − ی (۴ لا۵ + ۳) + ۳ لا۶ = ۰

اب الک ارقام (ب − ا)/(سہ − صہ) و (س − ا)/(سہ − لہ) ... کی اس صورت مین یہہ ہے کہ

(۲ − ۳)/(۲ − ۴) و (۳ − ۵)/(۱ − ۴) و (۲ − ۴)/(۰ − ۴) اب انمین سی دوسری اور تیسری رقم برابر ایک

کے ہی جو بہ نسبت ½ کی بڑہی ہی اور یہہ قیمت اول رقم کی ہی پس ط = ۱ اسی معلوم ہوا کہ

ی = لا (لو + لو) رکہو اور اسکو مساوات مفروضہ مین رکہو تو سب سے اعلی قوت لا کی لاٗ ہے

اور رقم جسمین وہ ملتف ہے یہہ ہے کہ

لاٗ [(لو + لو)۲ − ۴ (لو + لو) + ۳]

پس جب لا لانہایت ہو تو یہہ امثال معدوم ہونی چاہئی اور اسی یہہ حاصل ہوتا ہے

لو۴ - ۴ لو + ۳ = ۰

اب یہہ ظاہر ہی کہ لو = ۱ ایک حل ہی اور جملہ مشتقہ ۴ لو۳ - ۴ بہی معدوم ہوتا ہے جب لو = ۱ تو قیمت ایک اتی ہے

لو۴ - ۴ لو + ۳ کو (لو - ۱)۲ پر تقسیم کرو تو خارج قسمت لو۲ + ۲ لو + ۳ حاصل ہوگا پس اور قیمتیں لو کی مساوات لو۲ + ۲ لو + ۳ = ۰ سے حاصل ہونگیں اور وہ

- ۱ ± √- ۲ ہیں پس اب یہہ نتیجہ نکالتی ہیں کہ مساوات مفروضہ سی دو حقیقی قیمتیں د کی ارقام ہین حاصل ہونگیں اور لا اول رقم ان قیمتوں مین سی ہر ایک قیمت مین او سکی قوت ہوگی کہ وہ لا کی قواء متنازلہ کے سلسلہ مین بیان کیجاوی

اب ہم لا (۱ + لو) کو د کی جگہ مساوات مفروضہ مین رکہو اور لو کی قیمتوں کو دریافت کرو بالفعل اسی مثال کو دوبارہ فرض کرینگے

(۲۸۴) دفعات ۲۸۱ اور ۲۸۲ مین نتایج ذیل حاصل ہوتے ہین

(۱) اگر ا + سہ د ب + صہ . . . ک + کد ص + قد سب برابر ہون تو مقادیر مر د مر د مر . . . سب برابر واحد کے ہونگے

(۲) اگر مقادیر ا + سہ د ب + صہ . . . ک + کد . . . ص + قد مین سی دو یا زیادہ برابر ہون اور بڑی بہ نسبت کل باقی ارقام کی ہون تو واحد سلک مر د مر د مر . . . مین واقع ہوگا اسواسطی ظاہر ہی کہ ط = ۱ ایک مناسب قیمت تحقیقات ۲۸۱ مین ہی کیونکہ یہہ قیمت دو یا زیادہ ارقام کو برابر اور بڑی بہ نسبت باقی ارقام کے بناتی ہے

جبریہ خطوط منحنی کی خطوط مستقیمہ ممتنع الملاقات کا ضابطہ ان دو نتایج مین ملتف ہے باقی اس دفعہ مین ہم سہ و صہ و لہ . . . سب کو صحاح فرض کرتی ہین اور د کو صفر

(۳) دفعہ ۲۸۲ مین اول مساوات لو کی سہ - کد قیمتین رکہتی ہی اور دوسری مساوات کی کد - سد قیمتین اور علی ہذا القیاس ہین الحاصل ہم کو یہہ قیمتین ء کی اول رقم کی دریافت ہوتی ہین اور یہی ہونا چاہئی تہا اسلئی کہ مساوات ء کی سہ درجہ کی ہے

(۴) فرض کرو کہ تمام جملی لا کی ک سی ل تک برابر ہین اور اعلی درجہ کی بہ نسبت اورون کی ہین تو ء کی قیمتون مین سے سہ - کد قیمتین ہونگین جو لا کی مثبت قوت سی شروع ہوتی ہین اور کد - سد قیمتین ہونگین جو صفر قوت سی لا کی شروع ہوتی ہین اور سد قیمتین جو لا منفی قیمتون سی شروع ہوتی ہین اسواسطی کہ کد - سد قیمتین ء کی ہین جو لا کی صفر قوت سی شروع ہوکر صعود کرتی ہین اس سبب سے کہ بموجب فرض کی قیمت ط = ۰ تمام ارقام ذیل

کد + کد ط د ل + لر ط ۰ ۰ ۰ ن + سد ط کو برابر اور بڑا کسی قسم سی جو انکی اگی ائی بناتی ہی سہ - کد قیمتین ء کی جو لا کی مثبت قیمتون سی شروع ہوکر صعود کرتی ہین اور اس صعود کا سبب مثبت قیمتین ط کی اور اونکی موافق قیمتین لو کی ہین جو قوت نمایون سہ و صہ ۰ ۰ ۰ کد کے تعلق سی حاصل ہوتی ہین اور سد قیمتین ء کی لا کی منفی قوتون سے شروع ہوتی ہی اور صعود کرتی ہین اور یہہ صعود ط کی منفی قیمتون سی اور اونکی موافق لو کی قیمتون سی جو قوت نمایون سد ۰ ۰ ۰ قد سی حاصل ہوتی ہین ہوتا ہے اور اسمین قد = ۰

(۵) ا ب د ۰ ۰ ۰ ص تمام الامتحد الدرجہ ہین اور م اعلی درجہ بہ نسبت مابقی کے رکہتا ہی سہ - لب قیمتین ء کی ہین جنمین اعلی قوت لا کی مثبت قوت نما $\frac{م - ا}{سہ - لب}$ ہی اور ء کی لب قیمتین ہین جنمین اعلی قوت لا کا منفی قوت نما - $\frac{م - ا}{لب}$ ہے

(۲۸۵) دفعہ ۲۸۲ مین جب مساوات لو کی حاصل ہوتی ہی اور اوسی ء کی قیمتون کے دوسرے رقم کی دریافت کرتی ہین اسپر ایک بات ہم کہتی ہین فرض کرو کہ ء = لاً (لو + لی) اسمین لو اور ط معلوم ہین اس ء کی قیمت کو مساوات مفروضہ مین مندرج کرو اسطرح مساوات مفروضہ کے درجہ کی مساوات حاصل ہوگی اکثر لو کی قیمتون مین بعض داخل ہونی کی قابل ہونگین اسواسطے بموجب فرض کے لو معدوم ہوتا ہی جب لا لا نہایت ہو

پس وہ قیمتین ی کی جو لا کی مثبت قوت سی شروع ہوتی ہین یا لا کی صفر قوت سے اونکو مستردکرنا چاہئی یہہ لو کی مسترد قیمتین ی کی اور قیمتون سی متعلق ہونگین جنسے کہ بالفعل ہم کو کچھ تعلق نہین ہی کیونکہ اسوقت صرف ہم یا تو وہ خاص قیمت ی کی تلاش کر رہی ہین جو لو لاؔ سی شروع ہوتی ہی یا خاص قیمتون ی کی تلاش کر رہی ہین جو اسطرح شروع ہوتی ہین اور ایک سی زیادہ ہین اور جنمین لو اور ط کی معلوم قیمتین ہین

(۲۸۶) دفعہ ۲۸۲ کی مثال کو دوبارہ لو ی کی جگہ لا (لو + لوؔ) اور لو = ۱ کے فرض کرو تو لا پر تقسیم کرنے کے بعد یہہ نتیجہ حاصل ہوگا

لوؔ^{4} (لاؔ^{0} ۰۰) + لوؔ^{3} (۴ لاؔ^{5} ۰۰۰) + لوؔ^{2} (۶ لاؔ^{5} ۰۰۰) − لوؔ (۱۰ لاؔ^{4} ۰۰) − ۲ لاؔ^{4} = ۰

یہان لوؔ کی مثال مین اعلی قوتین لا کی بیان کردین اب دفعہ ۲۸۲ کی کسور سی یہہ حاصل ہوتا ہے

$\frac{۵ = ۵}{۳ = ۴}$ و $\frac{۵ = ۵}{۲ = ۴}$ و $\frac{۵ = ۴}{۱ = ۴}$ و $\frac{۵ = ۴}{۰ = ۴}$

یہان اول دو قیمتین صفر ہین اور جبر و مقابلہ کی اعتبار سی بڑی بہ نسبت اورون کے ہین لیکن صفر قیمت مسترد ہونی چاہئی جسکا بیان دفعہ بالا مین کیا گیا اسیواسطی دفعہ ۲۸۱ کی طرح پہر ہم عمل کرین اور فرض کرین کہ م = ۰ اب ہم کو م دریافت کرنا ہی اسواسطی یہہ کسرین بنائی جائینگی

$\frac{۴ = ۵}{۱ = ۲}$ و $\frac{۵ = ۴}{۰ = ۲}$

انمین سی دوسری − ۲/۱ ہی اور جبر و مقابلہ کے لحاظ سی بڑی ہے پس اسکے موافق ہم لوؔ = لو لا$^{-\frac{1}{2}}$ اور مساوات ۶ لو^{2} − ۲ = ۰ سی قیمت لو کی دریافت کرتی ہین پس لو = ± $\frac{1}{\sqrt{3}}$

پس اول رقم لو کی ± $\frac{1}{\sqrt{3}\,لا}$ یا − $\frac{1}{\sqrt{3}\,لا}$ ہے اسیواسطی جہانتک ہم نی عمل کیا ہے

ی = لا (۱ + $\frac{1}{\sqrt{3}\,لا}$ + ۰۰) یا ی = لا (۱ − $\frac{1}{\sqrt{3}\,لا}$ + ۰۰)

(۲۸۷) لو کی قیمتون کی صفت مساوات عامہ لو کی بناوٹ کی امتحان سی معلوم ہوسکتی ہے اول فرض کرو کہ بجای ی کی لاؔ لو رکہین اور پہر لو کو لو + لوؔ سی تبدیل کرین جیسا ہم ی کی جگہ لاؔ لو

ءکہین تو دائین طرف کا رکن مساوات یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ص_۱(لو)\ لا^{ن_۱} + ص_۲(لو)\ لا^{ن_۲} + ص_۳(لو)\ لا^{ن_۳} + \cdots$$

اسمین ن۱ و ن۲ و ن۳ . . . مقدار کی لحاظ سی بہ ترتیب تنازلی ہین اس جملہ کو سر (لو) سی تعبیر کرو تو مساوات لو کی یہہ ہوگی کہ سر (لو + لو) = ۰ مساوات مفروضہ مین ء کی قوت نما مثبت فرض کئی ہین مساوات لو مین اسطرح لکہی جائیگی کہ

$$سر_{سہ}\ لو^{سہ} + سر_{سہ-۱}\ لو^{سہ-۱} + سر_{سہ-۲}\ لو^{سہ-۲} + \cdots + سر_۱\ لو + سر_۰ = ۰$$

اسمین سر سہ کو بجای $\frac{۱}{سہ}$ سر^سہ (لو) کے رکہا ہی اور اسی طرح کے معنی سر سہ-۱ و سر سہ-۲ کے ہین اب اگر کوئی خاص قیمت لو کی نہ مقرر کیجای تو اشال اکثر فوار لو کے اوپر کی مساوات مین جملی لا کی ہونگی اور سب ایک درجہ کی ہین یعنی ن۱ درجی کے پس بموجب دفعہ ۲۸۴ کی لو کی قیمتین لا کی صفر قوت سی شروع ہونگین لیکن اگر لو ایسا ہو کہ ص۱ (لو) = ۰ تو جملہ سر کا ادنی درجہ کا بہ نسبت جملہ سر۱ کے ہوگا مگر اسی معلوم ہوا کہ لو کی قیمتون سی ایک قیمت لا کی منفی قوت سی شروع ہوتی یعنی $لا^{-(ن_۱-ن_۲)}$ اور یہی قیمت لو کی ہی جسکی ہم تلاش کر رہی تہی چونکہ ص۱ (لو) = ۰ مساوات ہی جسی لو کی قیمت موافق اپنی عمل کے ہم دریافت کر لینگی لیکن اگر مساوات ص۱ (لو) = ۰ کی قیمتین برابر ہون تو لو کی ایک سی زیادہ مناسب قیمتین ہم کو حاصل ہونگین مثلاً فرض کرو کہ خاص قیمتین جو ہم نی منتخب کی تہی وہ چار دفعہ واقع ہوتی ہی تو لا کی ن۱ درجہ کا سر۴ ہوگا اور ن۲ درجہ کی سر۳ و سر۲ و سر۱ و سر۰ ہونگے اسی بموجب دفعہ ۲۸۴ کے معلوم ہوتا ہی کہ لو کی چار مناسب قیمتین ہونگین ہر یک لا سی شروع ہوگی جسمین لا کا صعود منفی قوت $-\frac{۱}{۴}(ن_۱ - ن_۲)$ سے شروع ہوگا

ہم نی یہان یہہ فرض کیا ہی کہ ص۲ (لو) اور اوسکی مشتقہ جملی کی اوس قیمت سی جسپر بحث ہو رہی ہے معدوم نہین ہوا

(۲۸۸) جو کچہہ ہم نی اوپر لکہا ہی اوسمین یہہ تحقیق کیا ہی کہ ء کی قیمتین لا کی قوا متنازلہ مین بیان کی ہین

پس اگر ہم اپنی نتایج کو علم ہندسہ کی موافق بیان کرین اور خطوط منحنی جو کی اون قیمتون کی موافق کہ قواعد لامین بیان ہوئی ہین مرتسم کرین تو اول رقم اوس سلسلہ کی جو قیمت د کی واسطی ہم نی دریافت کی ہی اوسی صفت ذاتی خط منحنی کی مبدء سی بہت فاصلہ پر معلوم ہوگی لیکن یہہ ترکیب اسطرح بہی استعمال مین اسکتی ہی کہ قیمتین د کی موافق قواعد متصاعدہ کے دریافت کرین تو قیمت د کی اول رقم صفت ذاتی خط منحنی کی جو مبدء سی بہت قریب بتلائینگی تاکہ د کی قیمتین قواعد متصاعدہ لامین دریافت کرنی کی ترکیب کو استعمال مین لاسکین یہہ تبدلات ہم کو کرنی چاہئی کہ اول سہ و صہ . . . قد کو بہ ترتیب تصاعیدی بلحاظ مقادیر جبریہ کی لکہو اور لا معدوم ہوگا جب لا معدوم ہوگا وہ لا کی لانہایت ہونی سی معدوم نہین ہوگا پس لا سب سی ادنی درجہ قوت کی ا مین ہو تو موافق سابق کی وہ سب سی اعلی قوت نہین ہوگی اور اسی کی متماثل تبدل ب اور ب مین اور باقی اور متشابہ مقادیر مین کرو

پس ط جب + ص ہی تو مقادیر ذیل

ا + سہ ط د ب + صہ ط . . ک + کد ط . . . ص + قد ط

مین ترتیب تصاعیدی بلحاظ مقدار کے ہوگی

موافق سابق کی سب سی بڑی قیمت ط کی ان مساواتون سی دریافت کرو کہ

ا + سہ ط = ب + صہ ط و ا + سہ ط = س + لہ ط . . . ا + سہ ط = ک + کد ط . . . ا + سہ ط = ص + قد ط

چوبیسواں باب مسائل متفرقہ

(۲۸۹) اس باب مین معادلات کی مسائل متفرقہ نہایت دلچسپ اور بہت کار آمد لکہینگے اونسی اوپر کے صفحون مین جو اصول لکہی ہین اونکی توضیح اور تشریح خوب ہوگی گویا یہہ مسائل اون اصول کی مثالین ہین

ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{ا^2}{لا - ا} + \frac{ب^2}{لا - ب} + \frac{س^2}{لا - س} + \cdot \cdot + \frac{ک^2}{لا - ک} - لا = ۰$$

کی کوئی خیالی قیمت نہین ہوتی اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ ع + ق $\sqrt{-1}$ ایک قیمت ہی تو ع − ق $\sqrt{-1}$ بہی دوسری قیمت ہوگی اب ان قیمتون کو متواتر مساوات بجای لا کے لکہو اور ماحصل آپسمین تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ق\left[\frac{ا^2}{(ع-ا)^2+ق^2}+\frac{ب^2}{(ع-ب)^2+ق^2}+\frac{س^2}{(ع-س)^2+ق^2}+\cdots+\frac{ک^2}{(ع-ک)^2+ق^2}\right]=0$$

اور یہہ ناممکن ہی اگر ق = ۰ کے نہ ہو

یا اس مسئلہ کو اسطرح ثابت کرو کہ مساوات مفروضہ کی دائیں طرف کی رکن کو مح (لا) سی تعبیر کرو اور فرض کرو کہ اُ و ب و س ۰ ۰ ک مقادیر جبریہ بہ ترتیب تصاعیدی ہین جب لا کچہہ ہی بڑا بہ نسبت اُ کے ہو تو مح (لا) کی اول رقم بہت بڑی ہوگی اور مثبت ہوگی اور لا کی اُ کی ساتہہ قربت کافیہ فرض کرکی ہم مح (لا) کی مثبت قیمت قطعی حاصل کرسکتی ہین اور جب لا کچہہ ہی کم ب سی ہو تو دوسری رقم مح (لا) کی بہت بڑی ہوگی اور منفی ہوگی اور لا کی ب کے ساتہہ قربت کافیہ فرض کرکی ہم مح (لا) کی منفی قیمت حاصل کرسکتی ہین پس لا کی اُ اور ب کے درمیان بعض قیمت کے مقرر کرنی سی مح (لا) کی علامت بدلتی ہی اور اسیطرح ب اور س کے درمیان لا کی بعض قیمت سے مح (لا) کی علامت بدلتی ہے اور علی ہذا القیاس اسطرح ہم ثابت کرسکتی ہین کہ مساوات مح (لا) = ۰ کی سب قیمتین حقیقی اور غیر مساوی ہین

مساوات مح (لا) = ۰ کی جو صورت ہی اوسی بہت آسان مساوات کی خاصیت جسکا اوپر بیان ہوا آسانی سی ثابت ہوسکتی ہی ظاہر ہی کہ اگر مساوات کو کسور سی خالص کرکے اصلی گینڈی کی صورت مین مساوات کو بدل لین تو کچہہ ہماری نتیجہ نکالنی پر اثر نہین ہوگا یعنی اگر بجای مساوات مح (لا) = ۰ کی یہہ مساوات بنالین کہ

مح (لا) (لا − اُ) (لا − ب) (لا − س) ۰ ۰ ۰ (لا − ک) = ۰

تو کچہہ نتیجہ مین فرق نہین آئیگا اور ثبوت ظاہر ہو جائیگا

(۲۹۰) ن مقادیر لا۱ و لا۲ و لا۳ ۰ ۰ ۰ لان کی قیمتین ان ن مساواتون سی دریافت کرو

$$لا_1 + لا_2 + لا_3 + \cdots + لا_ن = ٠$$

$$ا_1 لا_1 + ا_2 لا_2 + ا_3 لا_3 + \cdots + ا_ن لا_ن = ٠$$

$$ا_1^2 لا_1 + ا_2^2 لا_2 + ا_3^2 لا_3 + \cdots + ا_ن^2 لا_ن = ٠$$

$$ا_1^{ن-٢} لا_1 + ا_2^{ن-٢} لا_2 + ا_3^{ن-٢} لا_3 + \cdots + ا_ن^{ن-٢} لا_ن = ٠$$

$$ا_1^{ن-١} لا_1 + ا_2^{ن-١} لا_2 + ا_3^{ن-١} لا_3 + \cdots + ا_ن^{ن-١} لا_ن = ب$$

ان مساواتون جداگانہ $س_{ن-١}$ و $س_{ن-٢}$ ... و $س_2$ و $س_1$ مین ضرب دو اور اور بالفعل $س_{ن-١}$ و $س_{ن-٢}$ ... $س_2$ و $س_1$ غیر معین ہین اور جو حاصل ہون اونکو جمع کرو اور یہہ فرض کرو کہ $س_{ن-١}$ و $س_{ن-٢}$ ... $س_2$ و $س_1$ ایسی ہین کہ $لا_2$ و $لا_3$ ... $لا_ن$ کے امثال کو معدوم کرتے ہین تو

$$لا_1 (ا_1^{ن-١} + س_1 ا_1^{ن-٢} + س_2 ا_1^{ن-٣} + \cdots + س_{ن-٢} ا_1 + س_{ن-١}) = ب$$

$س_{ن-١}$ و $س_{ن-٢}$ ... $س_2$ و $س_1$ کے باب مین جو فرض کیا ہی اوسی یہہ استخراج ہوتا ہے کہ $ا_2$ و $ا_3$ ... $ا_ن$ قیمتین مساوات

$$ی^{ن-١} + س_1 ی^{ن-٢} + س_2 ی^{ن-٣} + \cdots + س_{ن-٢} ی + س_{ن-١} = ٠$$

کی ہین اسیواسطے دائین طرف مساوات کی ازروی تطابق برابر

$$(ی - ا_2)(ی - ا_3) \cdots (ی - ا_ن)$$

اسی معلوم ہوا کہ $ا_1$ کو بجای ی کی مساوات مین رکہین جسبی $لا_1$ معین ہو تو $لا_1$ اس صورت مین نمایان ہوگا کہ

$$لا_1 (ا_1 - ا_2)(ا_1 - ا_3) \cdots (ا_1 - ا_ن) = ب$$

پس $لا_1$ معلوم ہوگیا اور $لا_2$ و $لا_3$ ... $لا_ن$ کو قرینہ سی دریافت کر سکتے ہین

(٢٩١) ن مقادیر لا و ک و ی ... ان ن مساواتون سے دریافت کرو

$$\frac{لا}{ک_1 - ا} + \frac{ک}{ک_1 - ب} + \frac{ی}{ک_1 - س} + \cdots = ١$$

$$\frac{\text{لا}}{\text{ک}_۲-\text{ا}}+\frac{\text{د}}{\text{ک}_۲-\text{ب}}+\frac{\text{ی}}{\text{ک}_۲-\text{س}}+\dots=۱$$

$$\frac{\text{لا}}{\text{ک}_\text{ن}-\text{ا}}+\frac{\text{د}}{\text{ک}_\text{ن}-\text{ب}}+\frac{\text{ی}}{\text{ک}_\text{ن}-\text{س}}+\dots=۱$$

ن مقادیر $\text{ک}_۱$ و $\text{ک}_۲$ ... $\text{ک}_\text{ن}$ کو اس مساوات واحد

$$\frac{\text{لا}}{\text{ک}-\text{ا}}+\frac{\text{د}}{\text{ک}-\text{ب}}+\frac{\text{ی}}{\text{ک}-\text{س}}\dots=۱$$

کی قیمتیں خیال کرسکتے ہین اور یہہ مساوات بلحاظ ک کے ن درجہ کی ہی فرض کرو کہ ک = ۱ - ط

تو اسی یہہ استخراج ہوگا کہ ط مین جو مساوات ذیل بیان ہوئی ہی اوسکی قیمتین

$۱-\text{ک}_۱$ و $۱-\text{ک}_۲$ و $۱-\text{ک}_۳$ ... ہین

$$۱+\frac{\text{لا}}{\text{ط}}+\frac{\text{د}}{\text{ط}+\text{ب}-۱}+\frac{\text{ی}}{\text{ط}+\text{س}-۱}+\dots=۰$$

نسب نمایون کی حاصل ضرب مین مساوات کو ضرب دیکر اوسکی یہہ صورت بناؤ کہ

$$\text{ط}^\text{ن}+\text{ا}_۱\text{ط}^{\text{ن}-۱}+\text{ا}_۲\text{ط}^{\text{ن}-۲}+\dots+\text{ا}_\text{ن}=۰$$

اسمین رقم جو ط سی بی تعلق ہی یعنی $\text{ا}_\text{ن}$ وہ لا (ب - ۱) (س - ۱) ... ہے

اسیواسطے بموجب دفعہ ۴۵ کے

$$(۱-\text{ک}_۱)(۱-\text{ک}_۲)(۱-\text{ک}_۳)\dots=(-۱)^\text{ن}\,\text{لا}\,(\text{ب}-۱)(\text{س}-۱)\dots$$

$$\text{یعنی لا}=\frac{(۱-\text{ک}_۱)(۱-\text{ک}_۲)(۱-\text{ک}_۳)\dots}{(۱-\text{ب})(۱-\text{س})\dots}$$

اس جملی سی قیمتین د اور ی ... کی حروف ا و ب و س ... کی قرینہ کے ساتھہ تبدل کرکے نکل سکتی ہین

(۲۹۲) ن مقادیر س و $\text{س}^۲$ و $\text{س}^۳$ ... $\text{س}^\text{ن}$ مین م مقادیر کو ایک ایک دفعہ لیکر ضرب دین تو ان حواصل ضرب کا مجموعہ ثابت کرو کہ یہہ ہے کہ

$$\text{س}^{\frac{\text{م}(\text{م}+۱)}{۲}}\;\frac{(\text{س}^\text{ن}-۱)(\text{س}^{\text{ن}-۱}-۱)\dots(\text{س}^{\text{ن}-\text{م}+۱}-۱)}{(\text{س}-۱)(\text{س}^۲-۱)\dots(\text{س}^\text{م}-۱)}$$

فرض کرو کہ

$$(\text{لا}+\text{س})(\text{لا}+\text{س}^۲)\dots(\text{لا}+\text{س}^\text{ن})=\text{لا}^\text{ن}+\text{ع}_۱\text{لا}^{\text{ن}-۱}+\dots+\text{ع}_{\text{ن}-۱}\text{لا}+\text{ع}_\text{ن}\dots(۱)$$

پس بموجب دفعہ ۲۸۵ کے قیمت ع م کی ہم کو دریافت کرنی ہے (۱) میں
لا کو لا/س سے بدل دو اور سن میں ضرب دو تو

(لا + س^۲) (لا + س^۳) ... (لا + س^(ن+۱)) = لا^ن + ع۱ س لا^(ن-۱) + ... + ع ن-۱ س^ن^-۱ لا + ع ن س^ن ... (۲)

(۱) اور (۲) سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

(لا + س^(ن+۱)) (لا^ن + ع۱ لا^(ن-۱) + ... + ع ن-۱ لا + ع ن) =
(لا + س) (لا^ن + ع۱ س لا^(ن-۱) + ... + ع ن-۱ س^(ن-۱) لا + ع ن س^ن)

اس متطابقہ کی دونو رکنوں میں امثال لا^(ن-م+۱) کو آپسمیں برابر لکھو تو

ع م + س^(ن+۱) ع م-۱ = ع م س^م + ع م-۱ س^م

اسیواسطے ع م = ع م-۱ · س^م (س^(ن-م+۱) - ۱) / (س^م - ۱) ... (۳)

اور ع۱ = س + س^۲ + ... + س^ن = س (س^ن - ۱) / (س - ۱) تو بوساطت (۳) کے
ہم ع۲ اور ع۳ و ع۴ ... کو متواتر معین کرسکتے ہیں اور اسی ہم کو قیمت مطلوب ع م کے
حاصل ہوجائیگی

(۲۹۳) فرض کرو کہ ا و ب و س ... ن مقادیر ہیں اور ص ن اونکا مجموعہ ہے
ص ن-۱ مجموعہ اونمین ن - ۱ مقادیر کا ہی اور علی ہذا القیاس اور فرض کرو کہ صح

(ص ن)^ر - ح (ص ن-۱)^ر + ح (ص ن-۲)^ر - ..... + (-۱)^(ن-۱) ح (ص۱)^ر
تعبیر کرتا ہی یہان ح (ص م)^ر مجموعہ ایسی ارقام کو تعبیر کرتا ہی جیسی کہ (ص م)^ر رقم جون مقادیر
ا و ب و س ... میں سی م مقادیر کے ممکن انتخابات سی بنتی ہی تو اب ہم یہہ ثابت
کرینگے کہ اگر ر چھوٹا ن سی ہو تو صح = ۰ اور اگر ن برابر یا بڑا بہ نسبت ن کی ہی تو صح پورا
ا ب س ... پر تقسیم ہوگا اور خاص کر

صح = |ن ا ب س ... جب ر = ن

اور صح = |ن+۱ / ۲ (ا + ب + س + ...) ا ب س ... جب ر = ن + ۱

ہم صحیح کو دو حصوں میں جدا جدا کرتی ہیں ایک وہ جسکی ہر رقم میں ا واقع ہوتا ہے اور دوسرا وہ حصہ ہی جسمین ا نہیں واقع ہوتا تو ہم پہلی حصہ کو اسطرح لکہ سکتی ہین کہ

$$(\text{ص}_\text{ن})^\text{ر} - \text{ح}_۱ (\text{ص}_{\text{ن}-۱})^\text{ر} + \text{ح}_۱ (\text{ص}_{\text{ن}-۲})^\text{ر} - \cdots + (-۱)^{\text{ن}-۱} \text{ا}^\text{ر}$$

اور دوسرے حصہ کو

$$-\text{ح}_۲ (\text{ص}_{\text{ن}-۱})^\text{ر} + \text{ح}_۲ (\text{ص}_{\text{ن}-۲})^\text{ر} - \cdots + (-۱)^{\text{ن}-۱} \text{ح}_۲ (\text{ص}_۱)^\text{ر}$$

اسمین ح۱ سی وہ خاص مقادیر تعبیر ہوتی ہین جو پہلی ح کی ماتحت تہین اور ح۲ سے باقی ارقام تعبیر ہوتی ہین اب فرض کرو کہ ا = ۰ تو صحیح معدوم ہوتا ہی کیونکہ اس صورت مین

$$(\text{ص}_\text{ن})^\text{ر} - \text{ح}_۲ (\text{ص}_{\text{ن}-۱})^\text{ر} = ۰$$

$$\text{ح}_۱ (\text{ص}_{\text{ن}-۱})^\text{ر} - \text{ح}_۲ (\text{ص}_{\text{ن}-۲})^\text{ر} = ۰$$

$$\text{ح}_۱ (\text{ص}_{\text{ن}-۱})^\text{ر} - \text{ح}_۲ (\text{ص}_{\text{ن}-۲})^\text{ر} = ۰$$

اور اسیطرح ہم ثابت کرسکتی کہ جب ب = ۰ اور س = ۰ کے تو صحیح معدوم ہوتا ہی اور علی ہذا القیاس پس ہم یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ صحیح اکثر مقادیر ا و ب و س ۰۰ مین سے ہر یک پر تقسیم ہوتا ہی اور اسیواسطی اونکی حاصل ضرب پر لیکن حاصل ضرب ن درجی کا ہی اور اسیواسطی اگر صحیح ن درجی سی کم ہو تو وہ از روی تطابق کی صفر ہوگا اور صحیح ر درجی کا ہے تو اسی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ جب ر کم بہ نسبت ن درجی کی ہو تو صحیح معدوم ہوتا ہے اور جب ر کم ن سے نہ ہو تو وہ پورا ا ب س ۰۰ پر تقسیم ہوتا ہے جب ر = ن تو صحیح = ل ا ب س ۰۰ کی حاصل ہوگا اسمین ل کوئی عددی مقدار ہے اسکو تشخیص کرنا چاہیی اب ل کے تشخیص کرنی کی واسطی فرض کرو کہ ا و ب و س ۰۰۰ مین ہر یک برابر واحد کے ہے تو صحیح یہہ ہو جائیگا کہ

$$\text{ن}^\text{ن} - \text{ن}(\text{ن}-۱)^\text{ن} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱\times۲}(\text{ن}-۲)^\text{ن} - \cdots$$

یعنی ل ن بموجب جبر مقابلہ کے انتالیسوین باب کے

دوم فرض کروکہ ر = ن + ۱ تو صح پورا ا ب س . . پر تقسیم ہوگا اور
چونکہ صح ن + ۱ درجی کا ہی تو اوسکا ایک جزضربی ایک درجہ کا ہو جو بلحاظ
ا و ب و س . . . ایک قرینہ رکہتا ہوگا اسواسطی یہہ جزضربی ا + ب + س . . ہوگا
اسی معلوم ہوا کہ صح = لب ا ب س . . . (ا + ب + س) + . . اسمین لب کوئی عددی
مقدار ہی اوسکا تشخیص کرنا چاہئی اب لب کی تشخیص کرنی کی واسطی فرض کروکہ ا و ب و س . .
وغیرہ مین ہر یک برابر واحد کے ہے تو

$$\text{صح} = \text{ن}^{\text{ن}+۱} - (\text{ن}-۱)^{\text{ن}+۱} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}(\text{ن}-۲)^{\text{ن}+۱} - \dots$$

اور یہہ برابر لب ن کے ہی معلوم ہوا کہ موافق باب ۹۳ باب جبر مقابلہ کے لب = $\frac{|\text{ن}+۱}{۲}$

(۲۹۴) فرض کروکہ [س]ر تعبیر س (س − ۱) (س − ۲) . . (س − ر + ۱)
کو کرتا ہے اور س خواہ کچہ ہی ہو تو

$$[\text{ا}+\text{ب}]_{\text{ن}} = [\text{ا}]_{\text{ن}} + \text{ن}[\text{ا}]_{\text{ن}-۱}\,\text{ب} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}[\text{ا}]_{\text{ن}-۲}[\text{ب}]_{۲} + \dots + [\text{ب}]_{\text{ن}}$$

اسواسطی کہ فرض کرو ا مثبت صحیح مقدار ہی تو یہہ ہم کو معلوم ہی کہ یہہ مسئلہ صحیح ہی خواہ ب کی
کوئی مثبت صحیح قیمت ہو کیونکہ $(۱+\text{لا})^{\text{ا}+\text{ب}}$ اور $(۱+\text{لا})^{\text{ا}} \times (۱+\text{لا})^{\text{ب}}$ مین امثال
لا کے مساوات سی یہہ نتیجہ استخراج ہوتا ہی پس اسی معلوم ہوا کہ ب کی ن قیمتون
سی زیادہ قیمتون کی واسطی ہی یہہ مسئلہ ازروی تطابق کے بموجب دفعہ ۹۳ کے
صحیح ہی یعنی جب ا کوئی مثبت صحیح مقدار ہی تو ب کی تمام قیمتون کی صورتمین مسئلہ صحیح ہے
اور چونکہ کوئی مثبت صحیح ا کے واسطی مسئلہ صحیح ہی تو وہ ا کی ن قیمتون سی زیادہ
قیمتون کی واسطی صحیح ہی اور اسیواسطی بموجب دفعہ ۹۳ کے وہ ا کی تمام قیمتون کے واسطے صحیح ہی
غرض یہہ سلسلہ اسطرح صحیح ثابت ہوتا ہی کہ ضابطہ جملہ ثنائی کو مثبت صحیح قوت نما کی صورت
مین فرض کرلین اور پہر دفعہ ۹۳ کی ضابطہ کو بہی صحیح مان لین اس مسئلہ کا نام کبہی وانڈرمونڈ
ہی لیا جاتا ہی جب فولر کا ضابطہ ثنائی اوس حالت مین ثابت کرتے ہین کہ قوت نما

کچھ ہی ہو تو اس مسئلہ کا وہاں کام پڑتا ہی اور یہہ بات مشہور ہی اور وہاں اس مسئلہ کو موافق اصول مستقل صور متسادیہ کے قائم کیا ہے

(٢٩٥) فرض کرو کہ مساوات مح (لا) = ٠ کی ایک قیمت ا ہی تو ہم فرض کرسکتی ہین کہ

$$\text{مح}(\text{لا}) = (\text{لا} - \text{ا})\,\text{مر}(\text{لا})$$

تو

$$\frac{\text{مح}(\text{لا})}{\text{لا}} = \left(1 - \frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right)\text{مر}(\text{لا})$$

$$\text{لوک}\,\frac{\text{مح}(\text{لا})}{\text{لا}} = \text{لوک}\left(1 - \frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right) + \text{لوک}\,\text{مر}(\text{لا})$$

$$= -\left(\frac{\text{ا}}{\text{لا}} + \frac{1}{2}\frac{\text{ا}^2}{\text{لا}^2} + \cdots\right) + \text{لوک}\,\text{مر}(\text{لا})$$

فرض کرو کہ لوک $\frac{\text{مح}(\text{لا})}{\text{لا}}$ کو ایسی سلسلہ مین پھیلائین کہ اوسمین لا کی مثبت اور منفی قوا ملتف ہون اور لوک مر (لا) کو اسی سلسلہ مین پھیلائین کہ اوسمین صرف لا کی مثبت قوتین ہون تو پھر مساوات کی دونو ارکان کا تطابق فرض کرین تو یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

- ا = امثال $\frac{1}{\text{لا}}$ کی جو صورت مفصلہ لوک $\frac{\text{مح}(\text{لا})}{\text{لا}}$ مین ہون

(٢٩٦) دفعہ بالا کی مسئلہ کو مرفی صاحب نی اپنی رسالہ مسائل معادلات مین لکھا ہے اس مسئلہ کا اثبات ناقص ہی کیونکہ سلسلہ غیر متناہی صورت مفصلہ کا انفراجی ہوسکتا ہے اس مسئلہ پر بڑی بڑی کتابون مین بحث لکھی ہے

(٢٩٧) مثلاً فرض کرو کہ اس مساوات

$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{س}\,\text{لا} - \text{ب} = 0$ کی ایک قیمت دریافت کرو

یہان

$$\frac{\text{مح}(\text{لا})}{\text{لا}} = \text{س} - \frac{\text{ب}}{\text{لا}} + \text{لا}^{\text{ن}-1}$$

$$\text{لوک}\,\frac{\text{مح}\,\text{لا}}{\text{لا}} = \text{لوک}\,\text{س} + \text{لوک}\left(1 - \frac{\text{ب}}{\text{س}\,\text{لا}} + \frac{\text{لا}^{\text{ن}-1}}{\text{س}}\right)$$

$$= \text{لوک}\,\text{س} - \text{ی} - \frac{1}{2}\text{ی}^2 - \frac{1}{3}\text{ی}^3 - \cdots$$

اسمین

$$\text{ی} = \frac{\text{ب}}{\text{س}\,\text{لا}} - \frac{\text{لا}^{\text{ن}-1}}{\text{س}} = \frac{\text{ب}}{\text{س}\,\text{لا}}\left(1 - \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ب}}\right)$$

اب ہم کو اون ارقام کا التقاط کرنا چاہئی جسمین $\frac{1}{\text{لا}}$ ملتف ہو تو ہم ایک ایسی رقم

ی سی اور ی$^{ن+1}$ اسی اور ی$^{۲ن+1}$ اسی اور علیٰ ہذا القیاس حاصل کر سکتی ہین

پس اسی معلوم ہوا کہ قیمت دریافت کرنی کیواسطی یہہ سلسلہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{ب}{س} - \frac{ب^{ن}}{س^{ن+1}} + \frac{۲ن}{۲}\,\frac{ب^{۲ن+1}}{س^{۲ن+1}} - \frac{۳ن(۳ن-1)}{۲\times۳}\,\frac{ب^{۳ن-۲}}{س^{۳ن+1}} + \cdots$$

(۲۹۸) فرض کرو کہ مساوات مح (لا) = ۰ کی قیمتین $ا_1$ و $ا_2$ ۰ ۰ $ا_م$ ہین پس ہم فرض کر سکتی ہین کہ

$$مح(لا) = (لا - ا_1)(لا - ا_2) \cdots (لا - ا_م)\ مر(لا)$$

$$\text{تو}\ \frac{مح(لا)}{لا^م} = \left(1 - \frac{ا_1}{لا}\right)\left(1 - \frac{ا_2}{لا}\right) \cdots \left(1 - \frac{ا_م}{لا}\right) مر لا$$

طرفین مساوات کی لوکارثم لو تو بموجب دفعہ ۲۹۷ کے ہم کو یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

$-(ا_1 + ا_2 + \cdots + ا_م)$ برابر امثال $\frac{1}{لا}$ کے ہے جو صورت مفصلہ

لوک $\frac{مح(لا)}{لا^م}$ مین ہو مرفی صاحب کے رسالہ مسائل معادلات کو دیکھو

(۲۹۹) ایک کسر ناطقہ کی تحلیل کرنی کا اور کسور مین بیان کرتی ہین ان کسور کو بلحاظ اصلی کسور کے کسور جزئیہ کہتی ہین

فرض کرو کہ ن درجہ کا جملہ لا کا مح (لا) ہی اور مساوات مح (لا) = ۰ کی سب قیمتین غیر مساوی ہین

اور ا و ب و س ۰ ۰ سی تعبیر ہوئی ہین اور مر (لا) ایک جملہ لا کا (ن - ۱) درجہ کا

یا اوسی ہی ادنی درجہ کا ہی تو یہہ ارتباط ازروی تطابق کی صحیح ہوگا کہ

$$\frac{مر(لا)}{مح(لا)} = \frac{ا}{لا - ا} + \frac{ب}{لا - ب} + \frac{س}{لا - س} + \cdots \frac{ک}{لا - ک}$$

بشرطیکہ مستقل قیمتین ا و ب و س ۰ ۰ ک کے واسطے مقرر کیجایئن

اب تا کہ یہہ ارتباط ازروی تطابق کی صحیح ہو تو یہہ ضروری ہی اور کافی ہی کہ ازروی تطابق کے یہہ صحیح ہو کہ

$$مر(لا) = ا\,\frac{مح\ لا}{لا - ا} + ب\,\frac{مح(لا)}{لا - ب} + س\,\frac{مح(لا)}{لا - س} \cdots + ک\,\frac{مح(لا)}{لا - ک}$$

ارکان اس مساوات کی ن - ۱ درجی سی بڑھی درجی کی نہین ہین اسی معلوم ہوا کہ یہہ ارتباط

ازروی تطابق کی صحیح ہوگا اگر ن قیمتین لا کی وہ دریافت ہو جایئن جنکی واسطی وہ صحیح ہے

دفعہ ۹۳ دیکھو اور ا و ب اور س ۰ ۰ ک مین مناسب انتخاب کر کے ارتباط

کو صحیح لا کی ن قیمتون ا و ب و س ۰ ۰ ک کی واسطی کر سکتی ہین اسواسطے کہ

فرض کرو لا = ا؛ ای تمام ارقام بایئن طرف معدوم ہوجاتی ہین الاوہ مقدار جسمین ا
ملتف ہی اور ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{مر}\,(\text{اَ}) = \text{ا}\left[\frac{\text{مر لا}}{\text{لا} - \text{اَ}}\right]_{\text{لا} = \text{ا}}$$

یعنی بموجب دفعہ ۲۹۷ کے

$$\text{مر}\,(\text{اَ}) = \text{ا}\,\text{حَ}\,(\text{ا})$$

اسی ا قطعی دریافت ہوتا ہی اور اسیطرح قیمتین ا و ب و س ۔ ک کی دریافت ہوتی ہین

(۳۰۰) اب فرض کرو کہ مر (لا) درجہ ادنی کا بہ نسبت ح (لا) کے نہین ہے
تو معمولی تقسیم کے قاعدہ سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{مر}\,(\text{لا})}{\text{حَ}\,(\text{لا})} = \text{ح}\,(\text{لا}) + \frac{\text{ر}\,(\text{لا})}{\text{حَ}\,(\text{لا})}$$

اسمین ح (لا) اور ر (لا) جملی صحیحہ لا کی ہین اور ر (لا) کا درجہ ادنی بہ نسبت
حَ (لا) کے ہی اب $\frac{\text{ر}\,(\text{لا})}{\text{حَ}\,(\text{لا})}$ موافق دفعہ گذشتہ کی تحلیل کسور جزئیہ مین کرین
چونکہ ہم کو یہہ معلوم ہے کہ

$$\text{مر}\,(\text{لا}) = \text{ح}\,(\text{لا})\,\text{حَ}\,(\text{لا}) + \text{ر}\,(\text{لا})$$

اسی یہہ استخراج ہوتا ہی کہ مر (لا) اور ر (لا) کی ایک ہی قیمت ہی جب حَ (لا) معدوم ہو
اسی معلوم ہوا کہ کسور جزئیہ مطابق $\frac{\text{مر}\,(\text{لا})}{\text{حَ}\,(\text{لا})}$ کی تشخیص موافق دفعہ ۲۹۹ کے ہوسکتی ہین
پہلی اسی کہ ہم مر (لا) کو حَ لا پر تقسیم کرین اگر $\frac{\text{مر}\,(\text{لا})}{\text{حَ}\,(\text{لا})}$ کی کامل قیمت دریافت کرنی ہوتی تو
ہم کو جزو ح (لا) کو ساقط کرنا نہ چاہئی تہا

(۳۰۱) ہم نتایج کو دقت سی خالی کرنی کی لئی دفعات گذشتہ مین کسر ناطقہ کے تحلیل کرنے
کا طریقہ کسور جزئیہ مین اوس صورت مین بیان کیا ہی کہ اونمین اجزاء ضربی مکرر نہین اتے
یہہ ایک خاص صورت تہی اب ہم علی العموم اسکی تحقیقات کرتے ہین

(۳۰۲) فرض کرو کہ حَ (لا) ایک جملہ لا کا ہی جسمین اجزاء ضربی مکرر اتی ہین مثلاً فرض کرو

$$\text{مح}(\text{لا}) = \text{ع}\,(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}}\,(\text{لا} - \text{بَ})^{\text{ما}}\,(\text{لا} - \text{س})^{\text{ط}} \cdots (\text{لا} - \text{گ})$$

اور مر (لا) کا درجہ جملہ لا کا ہی تو جملہ $\frac{\text{مر}(\text{لا})}{\text{مح}(\text{لا})}$ اجزاء ذیل مین تحلیل ہو سکتا ہی (۱) کوی جز ضربی لا − کَ جو مکرر نہین آتا اوسی ایک رقم $\frac{\text{ک}}{\text{لا}-\text{کَ}}$ پیدا ہوگی (۲) جز ضربی (لا − اَ)^ر سے یہہ سلسلہ ارقام پیدا ہوگا کہ

$$\frac{\text{ا}}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}}} + \frac{\text{ا}_1}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}-1}} + \frac{\text{ا}_2}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}-2}} + \cdots + \frac{\text{ا}_{\text{ر}-1}}{\text{لا} - \text{اَ}}$$

اور اسی طرح کا سلسلہ ارقام اور ہر ایک جز ضربی مکررہ سی پیدا ہوگا (۳) اگر مر (لا) ادنی درجہ کا مح (لا) سی نہین ہوگا تو ایک جملہ صحیحہ بہی پیدا ہوگا

اسواسطے کہ فرض کرو کہ مح (لا) = (لا − اَ)^ر ھر (لا) تو اخواہ کچہ ہی ہو اذروی تطابق کے

$$\frac{\text{مر}(\text{لا})}{\text{مح}(\text{لا})} = \frac{\text{ا}}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}}} + \frac{\text{مر}(\text{لا}) - \text{ا}\,\text{ھر}(\text{لا})}{\text{مح}(\text{لا})}$$

اب فرض کرو کہ مر (اَ) − ا ھر (اَ) = ۰ تو مر (لا) − ا ھر (لا) جب لا = اَ کے ہو معدوم ہوگا اور اسیواسطے لا − اَ پر پورا تقسیم ہوگا

اسیواسطے ا کے اس قیمت کے موافق ہم یہہ رکھہ سکتی ہین کہ

$$\text{مح}(\text{لا}) - \text{ا}\,\text{ھر}(\text{لا}) = (\text{لا} - \text{اَ})\,\text{مح}_1(\text{لا})$$

اور اسیواسطے

$$\frac{\text{مر}(\text{لا})}{\text{مح}(\text{لا})} = \frac{\text{ا}}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}}} + \frac{\text{مر}_1(\text{لا})}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}-1}\,\text{ھر}(\text{لا})}$$

اسی طرح سی اخر کسر کی تحلیل کرکے یہہ حاصل کر سکتی ہین کہ

$$\frac{\text{مر}_1(\text{لا})}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}-1}\,\text{ھر}(\text{لا})} = \frac{\text{ا}_1}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}-1}} + \frac{\text{مر}_2(\text{لا})}{(\text{لا} - \text{اَ})^{\text{ر}-2}\,\text{ھر}(\text{لا})}$$

پس اسی طریقہ سی بار بار عمل کرنے سے نتیجہ مطلوب قائم ہوجائیگا

(۳۰۳) دفعہ ۳۰۲ کی طرح یہہ ثابت کرنا آسان ہی کہ $\frac{\text{مر}(\text{لا})}{\text{مح}(\text{لا})}$ کی تحلیل صحیحہ جملون مین ایک ہی طرز پر ہو سکتی ہی اور کسور جزئیہ کا ایک سلسلہ ہوتا ہی جسکی نسبتنما مین ایک جداگانہ ہی جز ضربی ملتف ہوتا ہے اسی معلوم ہوا کہ اخر کو نتیجہ ایک ہی حاصل ہوگا خواہ عمال کی ترتیب کچہ ہی ہو

یعنی خواہ کسی جز ضربی پر اول ہم عمل کرین

عملاً عمدہ طریقہ کسور جزئیہ کے شمار کنندون کے دریافت کرنے کا ذیل مین لکھا جاتا ہے کہ لا = ا + ھ کی رکھو تو

مر (لا) / مح (لا) = مر (لا) / (لا − ا)^م ھر (لا) = مر (ا + ھ) / ھ^م ھر (ا + ھ)

اب کسی ترکیب سے مر (ا + ھ) / ھر (ا + ھ) کو قوا ھ مین پہیلاؤ تو بموجب طریقہ کتابت کی جو اوپر بیان ہوا ہے

یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

مر (ا + ھ) / ھر (ا + ھ) = ا + ا١ ھ + ا٢ ھ² + ا٣ ھ³ + ...

یعنی مر (ا + ھ) / ھر (ا + ھ) کی صورت منفصلہ مین جو موافق قوا متصاعدہ ھ کے ہو ام امثال ھ^م کے ہین

اور اسیطرح سے اور کسور جزئیہ کے شمار کنندون کو مقرر کرو

(۳۰۴) اب دفعات ذیل مین مسائل لکھی ہین جنسے کہ مساوات کی قیمتون کی حدود غائی معلوم

ہون وہ پروفیسر ڈی مورگن نے ایک چٹہی مورخہ ۱۸ فروری ۱۸۵۸ع مین لکہکر بہیجی تہی

(۳۰۵) اس مسئلہ مین مساوات کی قیمتون کی حدود غائی کی دو ترکیبین جو باب ہفتم مین بیان ہوئی ہین

داخل ہین اور ان پر کچہ اور مزید ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = ع٠ لا^ن + ع١ لا^(ن−١) + . . . + ع(ن−١) لا + ع ن

اب ہم کو مساوات ح (لا) = ٠ کی قیمتون کی اعلی حد غائی دریافت کرنے ہین

فرض کرو کہ ا برابر اول رقم کے امثال ہو یا اوسی کسی کم شی کا اور ب کم از کم مثبت امثال ا کے ما بعد

اور کسی منفی امثال کا ما قبل ہو یا اوسی کسی کم شی کا اور س برابر سب سے بڑی منفی امثال کے

عدد قیمت کی ہو یا اوسی کسی بڑی شی کی

اور فرض کرو کہ لا^(ن−ک−١) اول رقم ہے جسکی امثال منفی ہین تو ح (لا) یقینی مثبت ہوگا اگر

جملہ ذیل مثبت ہو کہ

(ا لا^ن + ب (لا^(ن−١) + . . . + لا^(ن−ک)) − س (لا^(ن−ک−١) + . . . + لا + ١)

یعنی جب جملہ ذیل مثبت ہو کہ

$$ا\,لا^{ن} + ب\,\frac{لا^{ن} - لا^{ن-ک}}{لا - ۱} - س\,\frac{لا^{ن-ک} - ۱}{لا - ۱}$$

یعنی لا کو بڑا واحد سے فرض کر کے

$$\left[ا(لا - ۱) + ب\right] لا^{ک} - (ب + س)\,لا^{ن-ک} + س$$

مثبت ہے یعنی بہ درجہ اولی مثبت ہے جب

$$\left[ا(لا - ۱) + ب\right] لا^{ک} - (ب + س)$$

صفر یا مثبت ہو

(۱) فرض کرو کہ ب = ۰ اور س تعداد ا سے بڑا منفی امثال ہی تو ح (لا) مثبت ہے اگر ا (لا − ۱) − س صفر یا مثبت ہی یعنی اگر $لا = ۱ + \frac{س}{ا}$ یا اسی بڑی شئی کی برابر ہو دفعہ ۸۷ دیکھو

(۲) فرض کرو کہ ب = ۰ اور س تعداد ا سے بڑا منفی امثال ہو تو ح (لا) مثبت ہو گا اگر ا (لا − ۱) $لا^{ک}$ − س صفر یا مثبت ہی اور اسیوسطی بدرجہ اولی وہ مثبت ہو گا اگر ا (لا − ۱)$^{ک+۱}$ − س ایسا ہو یعنی اگر $لا = ۱ + \left(\frac{س}{ا}\right)^{\frac{۱}{ک+۱}}$ یا کسی بڑی شئے کے دفعہ ۸۹ دیکھو

(۳) ا کی جگہ صفر رکھو تو ح (لا) مثبت ہو گا اگر ب $لا^{ک}$ − (ب + س) صفر یا مثبت ہے یعنی اگر $لا = \left(۱ + \frac{س}{ب}\right)^{\frac{۱}{ک}}$ یا کسی بڑی شئی کی یہہ ایک نئی حد غائی ہی جو چھوٹی بہ نسبت (۲) کے ہی جب ب بڑی ع سے مقرر کیجائے

(۴) اگر ا بڑا بہ نسبت ب کے نہ ہو تو ح (لا) مثبت ہے اگر

$$\left[ا(لا - ۱) + ا\right] لا^{ک} - (ا + س)$$

صفر ہے یا مثبت ہی یعنی اگر $لا = \left(۱ + \frac{س}{ا}\right)^{\frac{۱}{ک+۱}}$ یا کسی بڑی شئے کے اور اسی چھوٹی حد بہ نسبت (۳) کے معلوم ہوتی جب ب چھوٹی ع سی نہ مقرر کیجائے

(۵) فرض کرو کہ ب چھوٹا س سی نہیں ہی تو اس سی ہم کو اعلی حد غائی $۲^{\frac{۱}{ک}}$ حاصل ہو گی

(۶) فرض کرو کہ ا چھوٹا س سی نہیں ہی تو (۲) سی $۱ + ۲^{\frac{۱}{ک+۱}}$ اعلی حد غائی حاصل ہو گی

(۷) فرض کرو کہ ۃ ا تہ ب چہوٹا سا سی ہی تو (۴) سی ہم کو ۲ ک$^{\frac{1}{+1}}$ اعلی حد غائی حاصل ہوگی

(۱۶۰۳) اب ہم مساوات کی قیمتوں کی حدود غائی کی باب میں ایک اور مسئلہ لکہتی ہیں وہ موقوف اسی جملہ ا لا^{ن} + ب لا$^{ن-۱}$ + س لا$^{ن-۲}$ + ۰۰ کی قیمت کے حساب لگانے پر موقوف ہی اور اس حساب کی ترکیب موافق قیمت معینہ لاکے دفعہ ۵ میں بیان ہوئی ہی اگر سر ایک قیمت معینہ کو تعبیر کرتی ہی تو حساب سی متواتر یہہ حاصل ہوگا کہ

ا بر د ا سر + ب و (ا بر + ب) سر و (ا سر + ب) سر + س ۰ ۰ ۰

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات ہی اب ح (لا) کی جماعتیں اسطرح بناؤ کہ ہر ایک جماعت میں مثبت رقمیں اور اوسکی اگی وہ منفی رقمیں ہوں جو ماقبل اگانی والی مثبت رقموں کی ہوں اب فرض کرو کہ فقط علامتوں ہی کے لکہتی سی یہہ تواتر حاصل ہو کہ

+ + - - - + - + + - - - - + - - +

اب اسکی جماعتیں اسطرح بناؤ کہ

(+ + - -) و (+ -) و (+ + - - - -) و (+ - -) د +

فرض کرو کہ اول جماعت میں قوا لاکے لا^{ن} سے لا$^{ن-ع}$ تک ہیں اور یہہ دو قوا اوسمیں داخل ہیں فرض کرو کہ جز ضربی لا$^{ن-ع}$ تقسیم کرنی سی ساقط کیا گیا اور امتحان سی لا کی ایک قیمت بر مقرر کرو اور جب لا = بر کے ہو تو خارج قسمت کا حساب بعد از تقسیم لا$^{ن-ع}$ کے کرو اگر نتیجہ مثبت ہی تو اوسکو ا$_۱$ سی تعبیر کرو اور ا$_۱$ لا$^{ن-۱}$ کو دوسری جماعت کا سر بناؤ اور فرض کرو کہ یہہ جماعت اوس رقم تک جسمیں لا$^{ن-ک}$ ملتف ہی پہلتی ہے پس جب ا$_۱$ لا$^{ن-ک}$ دوسرے جماعت میں سب سے اول مقرر کیا گیا ہو تو لا$^{ن-ل}$ پر تقسیم کرو اور جب لا = سر ہو تو قیمت خارج قسمت کا حساب کرو اور اوسکو ا$_۲$ سی تعبیر کرو اور ا$_۲$ لا$^{ن-ل}$ کو جماعت مابعد میں سب سے اول لکہو اور علی ہذا القیاس اگر تمام نتیجے اخر تک مثبت ہوں تو بر اعلی حد غائی مثبت قیمتوں کی ہوگی اور عدد بر کا ہماں قواعد میں سی موافق ایک قاعدہ کے منتخب ہو سکتا ہے

اس بات کو یاد رکھنا چاہیے کہ جب اول ہی جماعت کا حساب کرو تو اوسی جو اعلی حد غائی دریافت ہوگی اوسی بہت بڑا عدد مطلوب بر نہیں ہوگا

مثلاً مساوات اٹھارہ درجے کی ہی تو اب ہم صرف امثال کو جماعتوں میں لکھی ہیں کہ

(۷ + ۴ + ۳ − ۸۰ − ۱۰۰) + (۲۰ − ۱۰۰) + (۳ + ۲ + ۱ − ۴۰ − ۱۰۰۰ − ۱۰۰۰)

+ (۷۰ − ۸۰۰۰ − ۲۰۰۰) + (۱۰۰ − ۴۰۰ − ۴۰۰۰)

اول جماعت پر خیال کریں تو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ۲ مثبت چھوٹا عدد ہی پہلی ۳ پر امتحان کرنا چاہیے

اب ہم قیمت

۷ لا^{۴} + ۴ لا^{۳} + ۳ لا^{۲} − ۸۰ لا − ۱۰۰

کا جب لا = ۳ کے ہو حساب کریں

۷	۴	۳	− ۸۰	− ۱۰۰
۷	۲۵	۷۸	۱۵۴	۳۶۲

پس ا$_{۱}$ = ۳۶۲

اب ہم قیمت

۳۶۲ لا^{۲} + ۲۰ لا − ۱۰۰

کا جب لا = ۳ کے ہو حساب کرتے ہیں

۳۶۲	۲۰	− ۱۰۰
۳۶۲	۱۱۰۶	۳۲۱۸

پس ا$_{۲}$ = ۳۲۱۸

اب قیمت

۳۲۱۸ لا^{۶} + ۳ لا^{۵} + ۴ لا^{۴} + لا^{۳} − ۴۰ لا^{۲} − ۱۰۰۰ لا − ۱۰۰۰ کا

کا حساب جب لا = ۳ کے ہو کرتے ہیں

اب یہہ ظاہر ہی کہ ہم کو تمام نتایج ا$_{۳}$ و ا$_{۴}$ و ا$_{۵}$ مثبت حاصل ہونگے پس اسی معلوم ہوا کہ ۳ مثبت قیمتوں کی اعلی حد غائی ہے

اس مثال مین موافق دفعہ ۹ کے اعلی حدِ غایی ۱ + ۸ ∶ ∶ ∶ / ۱۱ ہی یہہ بڑا ۷ سے ہے
اور بموجب دفعہ ۸۹ کے اعلی حدِ غایی ۱ + ۳ √ ۸ ∶ ∶ ∶ / ۷ ہی اور یہہ ۱ اسی زیادہ ہے

الحاصل مختصر بیان اس مسئلہ کا یہہ ہی کہ تمام جملی کو متواتر مثبت اور صحیح جماعتون

لاع − ب لاق + س لار − د لاص … مین تقسیم کرو اور ہر جماعت مین لا کا قوت تما اخر لکھو

اور لاع − ب لاق کو لاا پر تقسیم کرو اور کوئی قیمت لا کی مثلاً م ایسی دریافت کرو

کہ وہ خارج قسمت کو مثبت بنایی اور فرض کرو کہ یہہ خارج قسمت ل ہو پہر لاق + س لار − د لاص کو

لاص پر تقسیم کرو اور کوئی قیمت لا کی لب جو شاید ل سی بڑی نہ ہو اور چہوٹی ل سی تو ہونی نہین چاہیے

ایسی دریافت کرو جو خارج قسمت کو مثبت بنایی فرض کرو کہ م یہہ خارج قسمت ہو

اب پہر عمل کو م لاص + ی لاط − ع لاو پر جاری کرو اور علی ہذا القیاس اخر تک یہی عمل جاری رکہو

تو لا کی اخر قیمت اسطرح حاصل ہو گی وہ مساوات کی ہر ایک قیمت سی بڑی ہو گی اور اول قیمت

لا کی یعنی ل اکثر اخر قیمت ہی ہوتی ہے

(۳۰۷) ایک مسئلہ کاچی صاحب کا لکہکر اس باب کو ختم کرتی ہین مطلب اس مسئلہ کا یہہ ہے

کہ حدود معینہ کی درمیان یہہ دریافت کرین کہ کتنی حقیقی اور کتنی خیالی قیمتین واقع ہوتی ہین

سٹرم صاحب کی ضابطہ مین خاص حقیقی قیمتون کی نسبت بیان کیا گیا ہی وہ یہان اس مسئلہ مین

علی العموم خیالی اور حقیقی قیمتون کی واسطی بیان کیا جاتا ہے غرض ضابطہ مخصوص حقیقی قیمتون کے واسطے تہا

اور یہہ مسئلہ علی العموم سب قیمتون کے واسطے ہے

(۳۰۸) کوئی قائم الزاویہ محور مقرر کرو اور لا اور ر محدد ین کسی نقطہ کے مقرر کرو اور

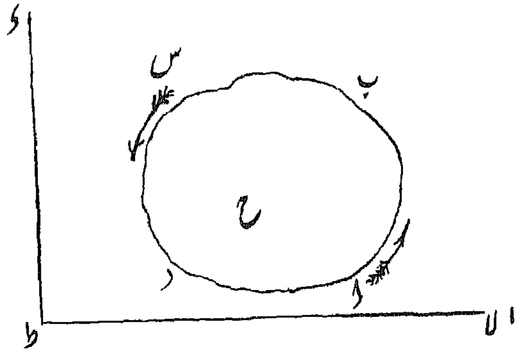
مح (ی) کوئی جملہ ناطقہ ی کا فرض کرو تو مح (لا + ر √−۱) اس صورت ع + ق √−۱

مین بیان ہو سکتا ہی جو نقطہ ایسا ہے کہ جسکی محدد ین ع اور ق کو ایک ہی وقت مین معدوم کر دیتے

اوسکا نام نقطہ اصلی رکہو اور ایک احاطہ ا ب س دکہیچو تو تعداد نقاط اصلی کی جو

اس حلقہ کی درمیان واقع ہونگی قاعدہ ذیل سی دریافت ہو جائینگی فرض کرو کہ ایک نقطہ اس

احاطہ کی گرد مثبت سمت میں حرکت کرنا چاہی اور اس بات کو گنتے جاؤ کہ کتنی دفعہ ع
کی نوبت صفر پر پہونچتی ہی اور اوسکی علامت تبدیل ہوتی ہی فرض کرو کہ ک دفعہ اوسکی علامت
+ سی - اور ل دفعہ - سی + ہی تو تعداد نقاط اصلی کی احاطہ کے اندر
$\frac{1}{2}$ (ک - ل) ہو گی



اس بات پر خیال کرنا چاہیے کہ احاطہ اب مقرر کیا گیا ہی کہ کوئی نقطہ اصلی اوسکی اوپر نہیں واقع ہوتا اور اگر کوئی خیالی قیمت مساوات ح (ی) = ۰ دو دفعہ یا تین دفعہ یا زیادہ دفعہ ایسی تو ہم کو یہہ خیال کرنا چاہیے کہ دو یا تین یا زیادہ اصلی نقطی ہیں اگرچہ وہ منطبق ایک دوسرے پر ہونگے اور مثبت سمت میں حرکت کرنی سی مراد ہماری یہہ ہی کہ ایک نصف قطر دائر ایک نقطہ قائم سی حلقہ کی اندر نقطہ متحرک تک کھینچا گیا ایک وہ چار قائموں کی برابر مثبت زاویہ پر گذرتا ہی اور نقطہ متحرک گرد حلقہ کے گذرتا ہے اس مسئلہ کی ثابت کرنی کی لیے اول صورت بی نہایت ہی چھوٹی احاطہ کی لیتی ہیں اور پھر ایک صورت احاطہ محدود کی لیتے ہیں

(۳۰۹) احاطہ کی اندر کوئی نقطہ ح جو نقطہ اصلی نہ ہو مقرر کرو اور ایک نہایت ہی چھوٹا احاطہ جسمیں ح ہی داخل ہو مرتسم کرو اور فرض کرو کہ نقطہ متحرک مثبت سمت میں اس نہایت ہی چھوٹی احاطہ کی گرد حرکت کرتا ہی تو ہم کو اب چار صورتوں پر بحث کرنی چاہیے

(۱) فرض کرو کہ ع نہ ق اس احاطہ کی اندر نہ اس احاطہ کے اوپر معدوم ہوتی ہیں

یہاں ع کی تمام دور میں علامت نہیں بدلتی تو قاعدہ سی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ کوئی اصلی نقطہ احاطہ کی درمیان نہیں ہی اور یہہ صحیح بھی ہی کیونکہ ع اور ق معدوم نہیں ہوتے

(۲) فرض کرو کہ احاطہ کی اندر نہ احاطہ کی اوپر ق معدوم ہوتا ہی مگر ع معدوم ہوتا ہے اس صورت میں ع کی علامت وہاں بدلتا ہی جہاں نقطہ متحرک ایسی مقام پر گذرتا ہی جہاں ع معدوم ہوتا ہے لیکن انجام دورہ پر ع اپنی اصلی علامت پر آجاتا ہی تو اسی معلوم ہوتا ہی کہ جتنی تغیر + سی - کے ہوئی ہونگی اوتنی تغیر - سی + کے ہوئی ہونگی اسی معلوم ہوا کہ ک اور ل برابر ہین اور قاعدہ سی ظاہر ہوتا ہی کہ کوئی اصلی نقطہ احاطہ کی درمیان نہین واقع ہوتا اور یہہ صحیح ہی کیونکہ ق معدوم نہیں ہوتا

(۳) فرض کرو کہ نہ احاطہ کی اندر اور نہ احاطہ کی اوپر ع معدوم ہوتا ہی لیکن ق معدوم ہوتا ہے اس صورت مین ع کبھی معدوم نہین ہوگا اب قاعدہ سی یہہ معلوم ہوتا ہے کہ کوئی نقطہ اصلی احاطہ کے اندر نہین ہے اور یہہ صحیح ہے کیونکہ ع معدوم نہین ہوتا

(۴) فرض کرو کہ ع اور ق دونو احاطہ کی اندر اور اوپر معدوم ہوتے ہین اگر وہ دونو ایک وقت معدوم نہ ہون تو ہم سطح کو جو احاطہ سی گھری ہوئی ہی اور سطحوں مین تقسیم کر دینگے جنمین سے بعض پر ع صرف معدوم ہوتا ہی اور باقی مین صرف ق معدوم ہوتا ہی تو اس طرح سی دو یا زیادہ احاطی بجای ایک احاطہ کی حاصل ہونگی اور اونکی صورت موافق صورت (۲) اور (۳) کے ہوگی پس صرف یہی ایک صورت رہی جسمین ع اور ق دونو ایک ہی وقت معدوم ہوتے ہین اور ایک نقطہ اصلی احاطہ کے اندر یا اوپر ہی اور ہم احاطہ کو ایسا چھوٹا فرض کر سکتی ہین کہ کہ اوسمین صرف ایک ہی نقطہ اصلی واقع ہو اور کوئی اوسکی اوپر نہ ہو

فرض کرو کہ ط اور ص اس اصلی نقطہ کے محددین ہین اور لا = ط + ص حم ر

اور ی = ص + لی جب ر

لا + ی √-۱ = ا + ب √-۱ + لیٖ (حم ر + √-۱ جب ر)

= ط + ص √-۱ + و کے مقرر کرو

اب فرض کرو کہ مساوات ح (ی) = ۰ کی قیمت ط + ص √−۱ م دفعہ مکرر آتی ہے
تو ح (ط + ص √−۱ + ف) کی صورت س ف^م + س۱ ف^م+۱ + س۲ ف^م+۲ + ...
کی ہوگی اسمین س و س۱ و س۲ ... خاص خیالی جملی کینڈی کے صورت کے ہین
پس ہم فرض کرسکتی ہین کہ

س = ھ (جم سہ + √−۱ جب سہ) اور س۱ = ھ۱ (جم سہ۱ + √−۱ جب سہ۱) ...

اسی معلوم ہوا کہ بموجب ضابطہ دی موئیور کے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ع/غ = [ھ جم (م بر + سہ) + ھ۱ لو جم [(م + ۱) بر + سہ۱] + ھ۲ لو۲ جم [(م + ۲) بر + سہ۲] + ...] / [ھ جم (م بر + سہ) + ھ۱ لو جب [(م + ۱) بر + سہ۱] + ھ۲ لو۲ جب [(م + ۲) بر + سہ۲] + ...]

اب ہم لو کو ایسا چھوٹا فرض کرتی ہین کہ تغیرات علامت کی تعداد مین لو سی کچھ اثر نہ ہو یعنی ہم اسطرح عمل کرسکتی ہین کہ گویا ع/غ = مم (م بر + سہ) اور چونکہ م ایک ضعف کسی دوسرے ضعف کا زیادہ ہوتا ہی تو ہمیشہ ایک رستہ صفر کی درمیان آیا ہوگا کہ وہان تغیر علامت + سی − ہو گا
پس ہم کو یہہ حاصل ہی کہ ک = ۲م اور ل = ۰ پس ½ (ک − ل) = م کے بموجب قاعدہ کے
(۳۱۰) مسئلہ اوس صورت مین ثابت ہوا کہ احاطہ نہایت ہی چھوٹا تھا اب اگر احاطہ محدود اب س د ہو تو اس احاطہ کو غیر متناہی نہایت ہی چھوٹی چھوٹی احاطون مین تقسیم کرو اور یہہ احاطہ ایسی مقرر کئی گئی ہین کہ اونمین سے نقطہ اصلی کسی ایک پر نہین واقع ہوتا تو تعداد اصلی نقاط کی احاطہ اب س د کی اندر اسطرح دریافت ہوگی کہ ایک نقطہ مقرر کرین جو ان ہی نہایت چھوٹی چھوٹی احاطون کو مرتسم کرتا ہوا اور جو موافق قاعدہ کی تعداد اصلی نقاط کی حاصل ہوا اونکو جمع کرکی ½ ح (ک − ل) سی تعبیر کرین لیکن یہی نتیجہ حاصل ہوگا اگر ہم تمام تقسیم کے خطوط اندرونی کو محو کردین اور فقط حد اب س د کو رہنی دین
کیونکہ ہر نقطہ جو اندر کے ہی نہایت چھوٹی احاطون مین خط تقسیم پر واقع ہوتا ہی وہ دو احاطون سے علاقہ رکھتا ہے اور اسیواسطے وہ مرتسم کرنی والی نقطہ سی دو دفعہ مختلف سمتون مین تقاطع کرتا ہے
پس اگر ایک صورت علامت ع/غ کی + سی − مین بدلتی ہی تو دوسری صورت مین − سی + مین بدلتی ہی اور کل تعداد ½ ح (ک − ل) پر اثر نہین ہوتا

اسی معلوم ہوا کہ اندر کے خطوط تقسیم محو ہو سکتی ہین اور نقطہ متحرک نقطہ احاطہ اب س د
کو مرتسم کرتا ہے

پس مسئلہ ثابت ہوا

(۳۱۱) اب ہم اس مسئلہ سی ایک اور مسئلہ مستنبط کرتی ہین کہ اگر ایک مساوات ن درجہ کی ہو تو اوسکی ن قیمتین ہونی چاہئی فرض کرو کہ احاطہ اب س د ایک دائرہ ہو اور مرکز اوسکا مبدء ہو اور اوسکا قطر غیر متناہی بڑا ہو تو قیمت ع کی اوس رقم مع (س) پر موقوف ہی جسمین اعلی قوت سہ کی ملتف ہو اور اگر ہم اوس رقم کو صہ (حم سہ + $\sqrt{-1}$ جیب سہ) کی فرض کرین تو ع = مم (ن سہ + سہ) پس ہم کو یہہ حاصل ہو گا کہ ک = ۲ ن
اور ق = ۰ پس $\frac{1}{2}$ (ک − ل) = ن

(۳۱۲) ہم نی دفعہ ۳۰۸ مین شکل ایسی کہینچی ہی کہ احاطہ کی ہر ایک نقطہ اندرونی سے ایک نصف قطر دائر ایک سمت مین کہینچا ہی اور احاطہ سی ایک ہی نقطہ پر ملتا ہے لیکن احاطہ کی قید اس شکل کی ساتہہ ضرور نہین شکل ایسی بہی ہو سکتی کہ نصف قطر دائر ایک سمت مین کہینچا گیا احاطہ سی طاق دفعہ ملاقی ہو

اسی معلوم ہوا کہ جب نقطہ گرد احاطہ کی متحرک ہوتا ہی تو نصف قطر دائر جو نقطہ متحرک اور کسی مبدء قائم کے درمیان کہینچا جائی اور یہہ نقطہ قائم احاطہ کے اندر ہو تو وہ ہمیشہ ایک ہی سمت مین متحرک نہین ہو گا نقطہ متحرک کی مثبت سمت حرکت سی ہم کو سمجہنا چاہئے کہ گو زاویہ دائر ہمیشہ زیادہ نہ ہوتا ہو مگر اوسپر دورہ مین مثبت زاویہ ۲ ط کی برابر افزایش ہوتی ہے جس ہیئت کی یہان شکل لکہی ہی اوسکی قید کچہہ نہین ہی غرض شکل کا اثر اثبات پر نہین ہے کیونکہ بے نہایت چہوٹی احاطی اگر ہم چاہین تو پہر بہی ایسی فرض ہو سکتی ہین کہ وہ بعضوی ہون جو مبدء مقررہ سی صرف ایک سمت محدودہ مین نصف قطر دائر کہینچا گیا رکہتی ہون اور اگر ہم اس قید کے بہی پابند نہ رہین تو ہم کو یہہ دیکہنا چاہئی کہ دفعہ ۳۰۹ کی اخر مین پر ہمیشہ زیادہ نہین ہوتا تو

بر کی اسی قیمتین ایسی ہونگین کہ جنکی سبب سی نتیجے معدوم ہوگا
جنکا ہم کو خیال بہی نہ تہا لیکن اگر ایسا ہوگا تو اتنی ہی وہان تغیرات + سی - اور - سی + پر ہونگے

(۳۱۳) ہم نے اپنی ساری تحقیقات مین یہہ فرض کیا ہی کہ احاطہ کی اوپر کوئی نقطہ اصلی نہین ہے
اگر نقطہ اصلی احاطہ پر ہو تو ہماری تحقیقات مین کچہہ تغیر سوا ر دفعہ ۳۰۹ کے اخر کے نہین
واقع ہوگا اور یہان فقط اتنا ہوگا کہ ر کے واسطی ۲ کہ کی ترتیب تہی اب صرف ک کی ترتیب ہوگی
اور م تغیرات علامت بجای ۲ م تغیرات علامت کے واقع ہونگے

(۳۱۴) یہہ کاچی صاحب کا ضابطہ پینی انسائی کلوپیڈیا کے مسائل معادلات کے اندر لکہا ہوا ہے
اور پروفیسر ڈی موگن کی علم مثلث اور جبر مقابلہ مین اور انہین صاحب کی اور تحریرات مین
موجود ہی غرض انہین کتابون سی اخذ کرکے یہہ سب کچہہ لکہا ہے

پچیسوان باب ادخال مقطعات

(۳۱۵) مسئلہ مقطعات کا اب ہم کچہہ بیان کرتی ہین یہہ فرع علم ریاضی کی زمانہ حال کا ایجاد ہے
روز بروز اوسکی ترقی ہوتی جاتی ہی اور بہت بڑی بڑی کام اوسی نکلتی ہین اس باب مین
بعض خاص مثالین اونکی بیان کرینگے اور اونکی توضیح اور تشریح اسطرح کرینگے کہ جنسی طالب علم
مقطعات کی ذات اور صفات کو بخوبی سمجہہ جائین اوسی اگی ایک باب مین مسائل عامہ اس فرع کے
لکہینگے اور پہر ایک باب مین مسائل معادلات مین جو کام اونسی نکلتا ہی اور جسطرح اونکا استعمال ہوتا ہے بیان کرینگے

(۳۱۶) ان معادلات ہم زاد پر خیال کرو کہ

$$ا_1 لا + ب_1 ی = س_1 \quad اور \quad ا_2 لا + ب_2 ی = س_2$$

ان مساواتون سے یہہ حاصل ہوتا ہے

$$کہ \quad لا = \frac{ب_2 س_1 - ب_1 س_2}{ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1} \quad اور \quad ی = \frac{ا_1 س_2 - ا_2 س_1}{ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1}$$

نسب نما مشترک $ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1$ کو چار مقادیر $ا_1$ و $ب_1$ و $ا_2$ و $ب_2$ کا مقطع کہتے ہین
اور اوسکو اس رمز سے تعبیر کرتے ہین کہ

لا اور ر کی قیمتون کی شمار کنندون $\begin{vmatrix}\text{ا}_1 & \text{ب}_1\\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2\end{vmatrix}$ کو بہی مقطعات کہتی ہین اور لا اور ر کی قیمت کو اس طرح ظاہر کیا کرتے ہین کہ

$$\begin{vmatrix}\text{ا}_1 & \text{ب}_1\\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2\end{vmatrix}\text{لا} = \begin{vmatrix}\text{س}_1 & \text{ب}_1\\ \text{س}_2 & \text{ب}_2\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}\text{ا}_1 & \text{ب}_1\\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2\end{vmatrix}\text{ر} = \begin{vmatrix}\text{ا}_1 & \text{س}_1\\ \text{ا}_2 & \text{س}_2\end{vmatrix}$$

(۳۱۷) ان مقطعات کو رتبہ دوم کا کہتی ہین کیونکہ ہر ایک رقم اونکی دو مقدارون سی مرکب ہی اور مقادیر ا_1 و ب_1 اور ا_2 اور ب_2 کو جو مقطع $\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1$ مین واقع ہوتی ہین اجزاء ذاتی کہتی ہین اور حاصل ضرب $\text{ا}_1\text{ب}_2$ اور $\text{ا}_2\text{ب}_1$ کو اجزاء ترکیبی مقطع کی کہتی ہین رتبہ دوم کی مقطع مین چار اجزاء ذاتی اور دو اجزاء ترکیبی ہوتی ہین
اس مقطع کے تعبیر کرنی کی واسطی جو رمز اوپر بیان ہوئی ہی اوسکی شکل مربع کی ہوتی ہی اور اوسمین دو صفین افقی ہوتی ہین یا دو صفین عمودی

(۳۱۸) اب رتبہ دوم کی مقطعات کی بعض صفات کا بیان کرتے ہین
چونکہ یہہ ہم کو حاصل ہے کہ

$$\begin{vmatrix}\text{ا}_1 & \text{ب}_1\\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2\end{vmatrix} = \text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1 \equiv \begin{vmatrix}\text{ا}_1 & \text{ا}_2\\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2\end{vmatrix}$$

اسی یہہ نتیجہ نکلتا ہی کہ اگر افقی صفون کو عمودی صفون مین بدل دین تو کچہ فرق نہین اتا

(۳۱۹) ذیل کے متطابقی اسانی سی ثابت ہوتے ہین کہ

$$\begin{vmatrix}\text{ا}_1 & \text{ب}_1\\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\text{ب}_1 & \text{ا}_1\\ \text{ب}_2 & \text{ا}_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\text{ا}_2 & \text{ب}_2\\ \text{ا}_1 & \text{ب}_1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\text{ب}_2 & \text{ا}_2\\ \text{ب}_1 & \text{ا}_1\end{vmatrix}$$

پس مقطع مین اگر دو افقی صفین یا دو عمودی صفین اپسمین متبدل ہو جائین تو مقطع کی علامت بدل جاتی ہی مگر اوسکی قیمت مین کچہ خلل نہین واقع ہوتا اور اگر یہہ دونو تبادل

ہون تو مقطع مین کچھہ بھی تبدل نہین واقع ہوتا

(۳۲۰) ہم کو معلوم ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ع ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ع ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = \text{ع}\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} \text{ع ا}_1 & \text{ع ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = \text{ع}\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$$

پس اگر ایک افقی صف کی یا ایک عمودی صف کی ہر جز ذاتی کو ایک مقدار معلوم مین ضرب دین تو مقطع کی ضرب اوس مقدار معلوم مین ہوجاتی ہے

(۳۲۱) ہم کو معلوم ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ا}_2 \end{vmatrix} = 0$$

پس اگر دو افقی صفین اور عمودی صفین متطابقہ ہون تو مقطع معدوم ہوجایگا

(۳۲۲) مقطعات کی توضیح اور تشریح سے یہہ ثابت ہوسکتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 + \text{اَ}_1 & \text{ب}_1 + \text{بَ}_1 \\ \text{ا}_2 + \text{اَ}_2 & \text{ب}_2 + \text{بَ}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{اَ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{اَ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{بَ}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{بَ}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{اَ}_1 & \text{بَ}_1 \\ \text{اَ}_2 & \text{بَ}_2 \end{vmatrix}$$

پس وہ مقطع جسکا ہر یک جز ذاتی مجموعہ دو رقمون کا ہو مساوی اون چار مقطعات کی ہوتا ہے جو اسطرح سے بنتی ہین کہ بجای ہر کل سطر عمودی کی ہم اونکی جزئیات عمودی سطرون کی لین اور یہہ ایک خاص صورت ہی کہ ہم فرض کرین $\text{اَ}_1 = \text{ب}_1$ اور $\text{اَ}_2 = \text{ب}_2$ تو بموجب دفعہ ۳۲۰ کے اوپر کے چار مقطعات مین سی دوسرا مقطع معدوم ہوجایگا اور ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 + \text{ب}_1 & \text{ب}_1 + \text{بَ}_1 \\ \text{ا}_2 + \text{ب}_2 & \text{ب}_2 + \text{بَ}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{بَ}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{بَ}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{بَ}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{بَ}_2 \end{vmatrix}$$

(۳۲۳) بموجب دفعہ ۳۲۲ کے

| ا١ س١ + ب١ ص١ و ا١ س٢ + ب١ ص٢ |
| ا٢ س١ + ب٢ ص١ و ا٢ س٢ + ب٢ ص٢ |

= | ا١ س١ و ا١ س٢ ; ا٢ س١ و ا٢ س٢ | + | ب١ ص١ و ب١ ص٢ ; ب٢ ص١ و ب٢ ص٢ | + | ا١ س١ و ب١ ص٢ ; ا٢ س١ و ب٢ ص٢ | + | ب١ ص١ و ا١ س٢ ; ب٢ ص١ و ا٢ س٢ |

= س١ س٢ | ا١ و ا١ ; ا٢ و ا٢ | + ص١ ص٢ | ب١ و ب١ ; ب٢ و ب٢ | + س١ ص٢ | ا١ و ب١ ; ا٢ و ب٢ | + ص١ س٢ | ب١ و ا١ ; ب٢ و ا٢ |

بموجب دفعہ ۳۲۰ کے اور بموجب دفعہ ۳۲۱ کے چار مقطعات مین اول دو مقطعات معدوم ہوتی ہین
اور بموجب دفعہ ۳۱۸ کے

| ب١ و ا١ ; ب٢ و ا٢ | = − | ا١ و ب١ ; ا٢ و ب٢ | ،

پس ہم نے یہہ چھوڑا ہے کہ

(س١ ص٢ − ص١ س٢) | ا١ و ب١ ; ا٢ و ب٢ | یعنی | س١ و ص١ ; س٢ و ص٢ | × | ا١ و ب١ ; ا٢ و ب٢ |

اسواسطے | س١ و ص١ ; س٢ و ص٢ | × | ا١ و ب١ ; ا٢ و ب٢ | = | ا١ س١ + ب١ ص١ و ا١ س٢ + ب١ ص٢ ; ا٢ س١ + ب٢ ص١ و ا٢ س٢ + ب٢ ص٢ |

پس حاصل ضرب دوسرے رتبہ کے دو مقطعات کا ایک مقطع دوسرے رتبہ کا ہے
اور یہہ ایک خاص صورت ہی کہ اجزاء ذاتی س١ و ص١ ، و س٢ و ص٢ جدا گانہ برابر
ا١ و ب١ ، و ا٢ و ب٢ کے ہوں تو یہہ مربع مقطع کا

| ا١ و ب١ ; ا٢ و ب٢ |

برابر اس مقطع کے ہے کہ

۱۰ | ا۱² + ب۱² و ا۱ ا۲ + ب۱ ب۲ |
| ا۱ ا۲ + ب۱ ب۲ و ا۲² + ب۲² |

(۳۲۴) اب ہم تیسری رتبہ کی مقطعات کا بیان کرتی ہین ان ہمزاد مساواتون پر غور کرو کہ

ا۱ لا + ب۱ ی + س۱ ی = د۱ و ا۲ لا + ب۲ ی + س۲ ی = د۲ اور ا۳ لا + ب۳ ی + س۳ ی = د۳

ان مساواتون سی یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

لا = د۱ (ب۲ س۳ − ب۳ س۲) + د۲ (ب۳ س۱ − ب۱ س۳) + د۳ (ب۱ س۲ − ب۲ س۱)
÷ ا۱ (ب۲ س۳ − ب۳ س۲) + ا۲ (ب۳ س۱ − ب۱ س۳) + ا۳ (ب۱ س۲ − ب۲ س۱)

اور اسی قبیل کے جملی ی اور ی کے قیمتون کے واسطی ہونگے
لا کی قیمت کی نسب نما کو تیسری رتبہ کا مقطع کہتی ہین اور اوسکی نو اجزاء ذاتی

ا۱ و ب۱ و س۱ اور ا۲ و ب۲ و س۲ و ا۳ و ب۳ و س۳ ہین اور اوسمین چھہ اجزا ترکیبی ہین اونمین سی ہریک تین اجزاء ذاتی کا حاصل ضرب ہی اور اس مقطع کو اس رقم سے تعبیر کرتے ہین

| ا۱ و ب۱ و س۱ |
| ا۲ و ب۲ و س۲ |
| ا۳ و ب۳ و س۳ |

چونکہ قیمت اس مقطع کے یہہ ہے کہ

ا۱ (ب۲ س۳ − ب۳ س۲) + ا۲ (ب۳ س۱ − ب۱ س۳) + ا۳ (ب۱ س۲ − ب۲ س۱)

اب اسکو ہم دوسرے رتبہ کے مقطعات مین اسطرح بیان کرتے ہین کہ

ا۱ | ب۲ و س۲ / ب۳ و س۳ | + ا۲ | ب۳ و س۳ / ب۱ و س۱ | + ا۳ | ب۱ و س۱ / ب۲ و س۲ |

لا کی قیمت کا شمار کنندہ بہی تیسری رتبہ کا مقطع ہی فقط ا۱ و ا۲ و ا۳ کو د۱ و د۲ و د۳ سے

جداگانہ نسبت نماکی رموزی جملون مین تبدیل کرلین تو شمار کنندہ کی رموزی جملی حاصل ہوجائیگے

اب ہم کو یہہ ظاہر معلوم ہوتا ہی کہ جو صفت اور خاصیت دوسرے رتبہ کی مقطعات کی تہی وہی ان تیسرے رتبہ کی مقطعات کی صفت اور خاصیت ہے

(۳۲۵) فرض کرو کہ ا۱ = ۱ اور ا۲ = ۰ اور ا۳ = ۰ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

| ۱ و ب۱ و س۱ |
| ۰ و ب۲ و س۲ | = | ب۲ و س۲ |
| ۰ و ب۳ و س۳ | 　 | ب۳ و س۳ |

پس اسطرح تیسرے رتبہ کی مقطع کی تحویل دوسرے رتبہ کے مقطع کی طرف ہوگی اور ب۱ اور س۱ کے قیمتین کچہ اس مقطع پر اثر نہین رکہتین اور اگر ہم چاہین تو اونکو برابر صفر کے لکہہ سکتے ہین

اسی معلوم ہوا کہ اگر کوئی ہم کو ارتباط تیسری رتبہ کے مقطعات مین معلوم ہو تو اوسی مثل اوس ارتباط کے دوسری رتبہ کی مقطعات مین ایک ارتباط اسطرح استنباط کرسکتے ہین کہ بعض اجزا ذاتی کو معدوم خیال کرین

(۳۲۶) مقطعات کی تشریح اور توضیح سے یہہ ثابت ہوسکتا ہے کہ

ا۱ | ب۲ و س۲ | + ا۲ | ب۳ و س۳ | + ا۳ | ب۱ و س۱ |
　 | ب۳ و س۳ | 　 | ب۱ و س۱ | 　 | ب۲ و س۲ |

= ا۱ | ب۲ و ب۳ | + ب۱ | س۲ و س۳ | + س۱ | ا۲ و ا۳ |
　 | س۲ و س۳ | 　 | ا۲ و ا۳ | 　 | ب۲ و ب۳ |

یعنی

ا۱ و ب۱ و س۱		ا۱ و ا۲ و ا۳
ا۲ و ب۲ و س۲	=	ب۱ و ب۲ و ب۳
ا۳ و ب۳ و س۳		س۱ و س۲ و س۳

اسی ثابت ہوا کہ اگر افقی صف اور عمودی صف آپسمین تبدیل ہوجاسکی تو مقطع مین کچھہ فرق نہین آتا

(۳۲۷) ذیل کی متطابقی ساتی اسی طرح ثابت ہوسکتی ہین کہ تیسرے رتبہ کی مقطعات کو دوسرے رتبہ کے مقطعات مین تحویل کرلین اور پھر اونکی توضیح کرین

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ا}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ا}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ا}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{س}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{س}_2 & \text{ا}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{س}_3 & \text{ا}_3 \end{vmatrix}$$

پس اگر دو عمودی صفون مین تبادل ہو تو علامت مقطع کی بدل جاتی ہی مگر اوسکی قیمت نہین بدلتی اور اسیواسطے اگر یہہ عمل دو دفعہ کیا جاے تو مقطع مین کچھہ تبدل نہین ہوتا اسی معلوم ہوا کہ موافق دفعہ ۳۲۶ کے اگر دو افقی صفین باہم متبدل ہون تو مقطع کی علامت بدل جائیگی مگر اوسکی قیمت مین کچھہ فرق نہین لگا اور اگر یہہ عمل دو دفعہ کیا جاے تو مقطع مین کچھہ تبدل نہین واقع ہوگا

اسی یہہ بھی نتیجہ نکلتا ہی کہ اگر دو عمودی صفون مین بھی تبادل ہوا اور دو افقی صفون مین بھی تبادل ہو تو مقطع مین کچھہ تبدل نہین ہوگا پس

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ا}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ب}_1 & \text{ا}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ب}_3 & \text{ا}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix}$$

(۳۲۸) دفعہ ۳۲۰ کی طرح ثابت کرسکتی ہین کہ اگر ایک افقی صف مین یا عمودی صف مین جز ذاتی کو کسی معلوم مقدار مین ضرب دین تو مقطع کی ضرب اوس مقدار معلوم مین ہوجائیگی

(۳۲۹) اسکا ثابت کرنا آسان ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{اور} \quad \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{س}_2 \end{vmatrix} = 0$$

پس اگر دو صفین افقی یا دو صفین عمودی متطابق ہوں تو مقطع فنا ہو جائیگا

(۳۳۰) اس بات کا ثابت کرنا آسان ہے کہ مقطع

| ا۱ + ا′۱ + ا″۱ و ب۱ و س۱ |
| ا۲ + ا′۲ + ا″۲ و ب۲ و س۲ |
| ا۳ + ا′۳ + ا″۳ و ب۳ و س۳ |

برابر ان تین مقطعات کے مجموعہ کے

ا۱ و ب۱ و س۱	و	ا′۱ و ب۱ و س۱	و	ا″۱ و ب۱ و س۱
ا۲ و ب۲ و س۲		ا′۲ و ب۲ و س۲		ا″۲ و ب۲ و س۲
ا۳ و ب۳ و س۳		ا′۳ و ب۳ و س۳		ا″۳ و ب۳ و س۳

اور اسی کی متشابہ نتیجہ حاصل ہوگا اگر اول عمودی صف میں ہر جز ذاتی مجموعہ چار رقموں کا یا مجموعہ پانچ رقموں کا اور علی ہذا القیاس ہوتا — اگر اجزاء ذاتی ب۱ و ب۲ و ب۳ میں ہر یک کی جگہ تین رقمیں رکھی جائیں تو تین مقطعات بالا میں سے ہر یک برابر تین مقطعات کے مجموعہ کے ہوگا اور علی ہذا القیاس

اسطرح سے مقطع ذیل برابر ۲۷ مقطعات کے مجموعہ کے ہو سکتا ہے

| ا۱ + ا′۱ + ا″۱ و ب۱ + ب′۱ + ب″۱ و س۱ + س′۱ + س″۱ |
| ا۲ + ا′۲ + ا″۲ و ب۲ + ب′۲ + ب″۲ و ا۲ + ا′۲ + ا″۲ |
| ا۳ + ا′۳ + ا″۳ و ب۳ + ب′۳ + ب″۳ و س۳ + س′۳ + س″۳ |

۲۷ مقطعات اسطرح سے اسکی بنتی ہیں کہ بجای کل عمودی صف کی لینی کل عمودی صفوں کے جزئیات میں سے ایک جز لیتی ہیں پس ان مقطعات میں سے تین وہ مقطعات ہونگے جو اوپر لکھی ہیں

(۳۳۱) دفعہ ۳۳۰ کے خاص صورت کے لئے ذیل کا مقطع لیتے ہیں کہ

| ا۱ سہ۱ + ب۱ صہ۱ + س۱ لر۱ و ا۱ سہ۲ + ب۱ صہ۲ + س۱ لر۲ و ا۱ سہ۳ + ب۱ صہ۳ + س۱ لر۳ |
| ا۲ سہ۱ + ب۲ صہ۱ + س۲ لر۱ و ا۲ سہ۲ + ب۲ صہ۲ + س۲ لر۲ و ا۲ سہ۳ + ب۲ صہ۳ + س۲ لر۳ |
| ا۳ سہ۱ + ب۳ صہ۱ + س۳ لر۱ و ا۳ سہ۲ + ب۳ صہ۲ + س۳ لر۲ و ا۳ سہ۳ + ب۳ صہ۳ + س۳ لر۳ |

یہہ دریافت ہوتا ہی کہ ۲۷ مقطعات ہین جنکا مجموعہ یہہ خیال کرسکتی تمام سوا ۶ کی بموجب دفعات ۳۲۸ اور ۳۲۹ کے معدوم ہو جاتی ہین تمثیلاً ۲۷ مقطعات مین سی ایک یہہ لو کہ

| ا۱ سہ۱ و ا۱ سہ۲ و ب۱ صہ۳ |
| ا۲ سہ۱ و ا۲ سہ۲ و ب۲ صہ۳ |
| ا۳ سہ۱ و ا۳ سہ۲ و ب۳ صہ۳ |

یعنی سہ۱ سہ۲ صہ۳

| ا۱ و ا۱ و ب۱ |
| ا۲ و ا۲ و ب۲ |
| ا۳ و ا۳ و ب۳ |

بموجب دفعہ ۳۲۸ کے اور یہہ مقطع بموجب دفعہ ۳۲۹ معدوم ہوتا ہی اور جو چھہ مقطعات باقی رہتی ہین اونمین سے ایک یہہ ہے کہ

| ا۱ سہ۱ و ب۱ صہ۲ و س۱ لر۳ |
| ا۲ سہ۱ و ب۲ صہ۲ و س۲ لر۳ |
| ا۳ سہ۱ و ب۳ صہ۲ و س۳ لر۳ |

یعنی سہ۱ صہ۲ لر۳

| ا۱ و ب۱ و س۱ |
| ا۲ و ب۲ و س۲ |
| ا۳ و ب۳ و س۳ |

ایک اور باقی ماندہ چھہ مقطعات مین سے لو تو

| ا۱ سہ۱ و س۱ لر۲ و ب۱ صہ۳ |
| ا۲ سہ۱ و س۲ لر۲ و ب۲ صہ۳ |
| ا۳ سہ۱ و س۳ لر۲ و ب۳ صہ۳ |

یعنی سہ۱ لر۲ صہ۳

| ا۱ و س۱ و ب۱ |
| ا۲ و س۲ و ب۲ |
| ا۳ و س۳ و ب۳ |

یعنی — سہ۱ لر۲ صہ۳

| ا۱ و ب۱ و س۱ |
| ا۲ و ب۲ و س۲ |
| ا۳ و ب۳ و س۳ |

بموجب دفعہ ۳۲۷ کے

اسکا نتیجہ یہہ ہی کہ جو چھہ مقطعات باقی رہتی ہین اونسی یہہ بنتا ہے کہ

[سہ۱ (صہ۲ لر۳ − صہ۳ لر۲) + سہ۲ (صہ۳ لر۱ − صہ۱ لر۳) + سہ۳ (صہ۱ لر۲ − صہ۲ لر۱)]	ا۱ و ب۱ و س۱ ا۲ و ب۲ و س۲ ا۳ و ب۳ و س۳

یعنی

سہ۱ و صہ۱ و لر۱ سہ۲ و صہ۲ و لر۲ سہ۳ و صہ۳ و لر۳	×	ا۱ و ب۱ و س۱ ا۲ و ب۲ و س۲ ا۳ و ب۳ و س۳	

اسی معلوم ہوتا ہی کہ حاصل ضرب تیسری رتبہ کی دو مقطعات کا تیسری رتبہ کے مقطع مین نمایان ہو سکتا ہی اگر ہم ا۱ و ب۱ . . . جداگانہ برابر سہ۱ و صہ۱ . . . کے فرض کرین تو ہم تیسری رتبہ کا مقطع حاصل کرینگے اور یہہ مساوی تیسری رتبہ کے مقطع کے مجذور کے ہوگا

(۳۳۲) ہم نی اسقدر مثالین مقطعات کی ذات اور صفات کی لکہ دین ہین کہ طالب علم کی سمجھہ مین بخوبی یہہ بات اجائیگی کہ یہہ مضمون کیا ہی ہم صرف رتبہ سوم کی مقطعات پر مطلب کو چھوڑتے ہین اس سبب سے کہ جو خواص مقطعات رتبہ سوم کی ثابت ہوئے ہین اوسی موافق دفعہ ۳۲۵ کے رتبہ دوم کے مقطعات کی خواص استخراج ہو سکتی تہی مگر جس طرح سی ہم نی اس مضمون کو بیان کیا ہی اوسیطرح متبدلوں کے واسطے سودمند ہی باب اٰئندہ مین ہم اثبات علی العموم لکہینگے خواہ مقطعات کسی رتبہ کے ہون اس بات پر غور کرو کہ ہم نی اس مقطعات کی مطلب کی تمہید ہزار مساواتون کو حل سے لکھی ہے اس تمہید سی طالب علم ایک ہی دفعہ مین سمجھہ سکتا ہے کہ اسی جملی جنکا نام مقطعات رکھا ہے ریاضیات مین واقع ہوتی ہین جب ہم مسئلہ عامہ لکہینگی تو وہان مقطعات کے تغیرات بالکل مساوات سی بی لگاؤ لکہینگے اور اوسی اس مسئلہ عامہ کے بیان کرنی مین اسانی ہوتی ہے اگر ہم تیسرے رتبہ کے مقطع کو ان معنی جدید کے موافق بیان کرین تو طالب علم اوس تعریف مقطعات کو جو باب ائندہ مین بیان ہوگی خوب سمجھے گا

(۳۳۳) قیمت مقطع

ا۱ و ب۱ و س۱
ا۲ و ب۲ و س۲
ا۳ و ب۳ و س۳ . . .

ا۱ ب۲ س۳ − ا۱ ب۳ س۲ + ا۲ ب۳ س۱ − ا۲ ب۱ س۳ + ا۳ ب۱ س۲ − ا۳ ب۲ س۱

ہی اول جز ترکیبی ا۱ ب۲ س۳ ہی اور یہہ حاصل ضرب اون اجزا ذاتی کا ہی جو اوس رفر کے مربع مین کہ مقطع کو تعبیر کرتا ہی قطر مین لکہی ہوئی ہین اور اب باقی اور اجزاء ترکیبی اول جز ترکیبی سے موافق طریقہ ذیل کی استخراج ہو سکتی ہین کہ اعداد زیرین ۱ و ۲ و ۳ حروف ا و ب و س کے نیچے اونہی مختلف طورون سی لگائی گئی ہین جتنی طور سی ترتیبین ان اعداد زیرین کی ہو سکتی ہین اور علامت + یا − کی کسی جز ترکیبی کے اول اسطرح لگ سکتی ہے کہ یہہ دیکہیں کہ یہہ جز ترکیبی اول جز ترکیبی سی کسطرح مستنبط ہوا ہی اگر جفت دفعہ تبدلات دو اعداد زیرین کا ہوا ہی تو + کی علامت لکہو اور اگر طاق دفعہ تبدلات ہوئی ہین تو − کی علامت مقرر کرو مثلاً دوسرا جز ترکیبی او پر ا۱ ب۳ س۲ ہی اور وہ اول جز ترکیبی سی اسطرح استخراج ہوا ہے اعداد زیرین ۲ اور ۳ مین تبادل ہوا ہی اسلئی بموجب قاعدہ کے علامت − کی اول لگائی جاسکے اور یہہ جز ترکیبی ا۲ ب۳ س۱ ہی اور وہ دوسرے جز ترکیبی سی اسطرح حاصل ہوتا ہے کہ اعداد زیرین ۲ اور ۱ مین تبادل ہوا ہی اور اسواسطے وہ اول جز ضربی سی دو اعداد زیرین کے دو تبادل سی مستنبط ہوتا ہی اسواسطے بموجب قاعدہ کی علامت + کی اول لگائی جائی اور اسیطرح اور باقی اجزاء ترکیبی کی متناسب علامات کا فیصلہ ہو سکتا ہے

(۳۳۴) تیسرے رتبہ کے مقطعات کے یہہ خاص صورتین امثلہ ذیل ہین جنکو طالب علم ثابت کر سکتا ہے

(۱)

ا	ھ	گ
ھ	ب	ف
گ	ف	س

= اب س − ا ف² − ب گ² − س ھ² + ۲ ف گ ھ

(۲)

ا	لا۱	ک۱
ا	لا۲	ک۲
ا	لا۳	ک۳

= لا۱ک۲ − لا۲ک۱ − لا۲ک۳ − لا۳ک۲ + لا۳ک۱ − لا۱ک۳

(۳)
| ۱ و ا۱ + ا۲ و ا۱ ا۲ |
| ۱ و ب۱ + ب۲ و ب۱ ب۲ |
| ۱ و س۱ + س۲ و س۱ س۲ |
= (ا۱ − ب۲)(ب۱ − س۲)(س۱ − ا۲) + (ا۲ − ب۱)(ب۲ − س۱)(س۲ − ا۱)

(۴)
| ۱ و ل و − ص |
| − ل و ۱ و س |
| ص و − س و ۱ |
= ۱ + س² + ص² + ل²

چھبیسوان باب خواص مقطعات

(۳۳۵) فرض کرو کہ ان رموز ا۱ و ا۲ ۰۰۰ ان ہین تو اوس ایک رمز کو بہ نسبت دوسرے رمز کے اعلی کہینگے جسمین کہ عدد زیرین بڑا بہ نسبت دوسرے عدد زیرین کے ہو مثلاً ا۳ کو اعلی بہ نسبت ا۲ یا ا۱ کے کہینگے یا ا۴ کو اعلی بہ نسبت ا۳ و ا۲ و ا۱ کے کہینگے اور علی ہذا القیاس اب فرض کرو کہ ان رموز کی ترتیبین بنائی گئین تو جس ترتیب مین دو رمزون کی اعداد زیرین مین اول بڑا بہ نسبت دوسرے کی ہو تو اوسی بی ترتیبی یا انتشار کہتے ہین مثلاً ترتیب ا۲ ا۴ ا۳ ا۱ مین چار بی ترتیبیان ہین یعنی ا۲ ا۱ و ا۴ ا۳ و ا۴ ا۱ اور ا۳ ا۱

(۳۳۶) رموز ا۱ و ا۲ ۰۰ ان مین دو نوع کی ترتیبین ہوسکتی ہین ایک وہ جنمین جفت تعداد بی ترتیبیون کی ہو دوسرے وہ جنمین طاق تعداد بی ترتیبیون کی ہو

(۳۳۷) جب کسی ترتیب مین دو رمزونمین تبادل اسطرح ہو کہ ایک دوسرے کی مقام بدل لے اور باقی رموز مین کچہ تبدل نہ ہو تو تعداد بی ترتیبیون کی جو زیادہ یا کم ہوگی وہ طاق ہوگی فرض کرو کہ گ و ک دو رموز ہین جنمین ک اعلی ہی اور گ سی پیشتر جماعت رموز کو ا تعبیر کرتا ہے اور گ اور ک کی درمیان جو جماعت رموز ہو اوسکو ب تعبیر کرتا ہے اور گ اور ک کے بعد جو جماعت رموز ہو اوسکو س تعبیر کرتا ہی تو جن ترتیبیون کا باہم مقابلہ کرنا ہے وہ ا گ ب ک س اور ا ک ب گ س ہین تو بی ترتیبیون کی تعداد کا فرق موقوف اون رموز

پیدا ہوتی ہیں جتنی کہ جماعتیں گ ب ک اور ک ب گ بنتی ہین فرض کرو کہ ب مین صـہ رموز داخل ہیں اور اونمین سی صـہ۱ اعلی بہ نسبت گ کے ہیں اور صـہ۲ اونمین سی اعلی بہ نسبت ک کے ہے تو جماعت گ ب ک مین علاوہ اون بی ترتیبون کی جو خود ب مین موجود ہین صـہ - صـہ۱ + صـہ۲ بی ترتیبیان اور ہیں اسواسطی کہ گ اعلی صـہ - صـہ۱ سی ب کے رموز مین ہی اور صـہ۲ رموز ب مین اعلی بہ نسبت ک کی ہین جماعت ک ب گ مین سوا اون بی ترتیبون کے جو خود ب مین ہین صـہ - صـہ۲ + صـہ۱ + ۱ بی ترتیبیان ہین اسواسطی کہ ک اعلی بہ نسبت صـہ - صـہ۲ رموز سی ب کی اندر ہی اور صـہ۱ رموز ب مین اعلی بہ نسبت گ کی ہین اور ک اعلی بہ نسبت گ کی ہی اسواسطی تفاوت بی ترتیبون کی تعداد مین

صـہ - صـہ۲ + صـہ۱ + ۱ - (صـہ - صـہ۱ + صـہ۲)

یعنی ۲ (صـہ۱ - صـہ۲) + ۱ یہہ تفاوت طاق عدد ہی

(۳۳۸) ایک ترتیب معلوم سی تمام ترتیبین جو کل ن رموز کی بنائی جائیں دو رمزون کی تبادل کی تکرار سی مستنبط ہو سکتی ہین اس طریقہ سی جو استخراج ترتیبون کا کرینگی تو موافق دفعہ ۳۳۷ کی باری باری ایسی ترتیبین حاصل ہونگین جنمین ایک دفعہ جفت بی ترتیبیان ہونگین اور دوسری دفعہ طاق بی ترتیبیان ہونگین اور تمام رموز کی ترتیبون کی کل تعداد جفت ہوگی اسی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ترتیبین جنمین بی ترتیبون کی تعداد جفت ہو اوتنی ہی ہوتی ہے جتنی کہ وہ ترتیبین ہوتی ہین کہ جنمین بی ترتیبون کی طاق تعداد ہو

(۳۳۹) فرض کرو کہ ق۲ مقادیر مربع کی صورت مین اسطرح لکہی جائیں

ا۱و۱	ا۱و۲	ا۱و۳	. . .	ا۱ون
ا۲و۱	ا۲و۲	ا۲و۳	. .	ا۲ون
.	.	.	.	.
ان و۱	ان و۲	ان و۳	.	ان ون

یہان کسی مقدار ا ر و ک مین عدد زیرین رسی تو افقی صف اور دوسرے عدد زیرین
کسی عمودی صف جسمین ا ر و ک نمایان ہو تعبیر ہوتی ہے
رمز بالا سی مقطع ن۲ مقادیر کا جو اوسمین واقع ہوتی ہین تعبیر ہوتا ہی اور ان مقادیر کو اجزاء
ذاتی اوس مقطع کا کہتی ہین اور قیمت مقطع کی اسطرح دریافت ہوتی ہی کہ خاص تعداد اجزاء ترکیبی کا
مجموعہ لین اور ہر جز ترکیبی مین ن اجزاء ذاتی ہین اول جز ترکیبی حاصل ضرب اجزاء ذاتی
ا۱،۱ د ا۲،۲ د ا۳،۳ . . . ا ن،ن کا ہے اور یہہ مربع مذکور کے اوس قطر مین
واقع ہین جو دائین طرف اوپر کی کونہ سی شروع ہوتا ہی اور اپنی مقابل کی کونہ پر ختم ہوتا ہے
ہم اس قطر کو قطر مربع کہینگے اسواسطی کہ اینده ہمکو موقع اس قطر کی طرف رجوع کرنی کا ملے گا
اور تمام اور اجزاء ترکیبی اول جز ترکیبی ا۱،۱ د ا۲،۲ د ا۳،۳ . . . د ا ن،ن
سی اسطرح حاصل ہوتی ہین کہ دوسرے عدد زیرین کی ترتیبین لیتی ہین اور پہلی عدد زیرین جیسا ہی
ویسا ہی رہتی دیتی ہین اور علامت + اور − کی اول مقطع کی ہر جز ترکیبی کے اول موافق نوع
کے مقرر کرتے ہین جسکا بیان دفعہ ٣٠٦ مین ہوا اگر وہ اوسی نوع کی ہین جس نوع
کا اول جز ترکیبی ہی تو علامت + کی اول لگاتی ہین اور اگر وہ اس نوع کا نہین ہوتا تو علامت − کی
(٣۴٠) اوپر کے مقطع کو ن رتبی کا کہتے ہین کیونکہ ہر جز ترکیبی ن اجزاء ذاتی کا حاصل ضرب ہوتا ہے
اور تعداد اجزاء ترکیبی کے اوتنی ہی ہوتے ہی جتنی کہ تعداد ن اشیا کی ترتیبون کی ہوتی ہے
جب ترتیب کل اشیا کی ایکہی دفعہ لی جائین یعنی |ن انمین سی نصف کی اول علامت + ہوگی
اور نصف کی اول علامت − کی یہہ بہی معلوم ہوتا ہی کہ اجزاء ترکیبی کا اسطرح بنائی جاتی ہین
اونمین سی ہر یک جز ترکیبی مین صرف ایکہی جز ذاتی اوس رمز کی ہر صف افقی کا یا ہر صف
عمودی کا ہوتا ہے جو اوس مقطع کو تعبیر کرتی ہے
(٣۴١) مقطع کی واسطی بجای رمز بالا کے بعض اوقات یہہ رمز
ح ± ا۱،۱ د ا۲،۲ د ا۳،۳ . . . ا ن،ن کام مین لاتے ہین یعنی جز ترکیبی اول

کو لکھتے ہین اور اوسکی اول زمرج ± کو لکھہ دیتی ہین اور اوسی تعبیر ہوتا ہی مجموعہ اجزاء ترکیبی کا جو اول جز ترکیبی سی مناسب ترتیبون اور علامات + اور - کی ٹہیک ٹہیک مقرر کرنی سے حاصل ہوتا ہے

مقطع کی اجزاء ترکیبی مختلف طور سی تعبیر ہوتی ہین کبھی تو (ے وک) کو بجاے (اے دک) کے کام مین لاتی ہین اور اس صورت مین یہہ یاد رکھنا چاہیے کہ (ے وک) اور (ک وے) جدا جدا مقادیر تعبیر ہوتی ہین ادنی رتبی کے مقطعات کی مثالون مین اسمین آسانی ہوتی ہی کہ دوسری اعداد زیرین کام مین نہ لائین ایک ہی حرف تمام اجزاء ذاتی کے واسطی جو ایک عمودی صف مین ہو کام مین لائین اور ایک ہی اعداد زیرین سی اونمین تمیز پیدا کرین یہی طریقہ کتاب ہذا کی پہلی باب مین اختیار کیا گیا ہے

(۳۴۲) اور اجزاء ترکیبی مقطع کی اول جز ترکیبی سی اسطرح استخراج ہوتی ہین کہ دوسری عدد زیرین کی ترتیبین لیتی ہین اور اول عدد زیرین مین کچھ تبدل نہین کرتے اور یہہ اجزاء ترکیبی ایک اور طرح سی حاصل ہوتی ہین کہ اول اعداد زیرین کی ترتیبین لین اور دوسرے اعداد زیرین مین تبدل نہ کرین اسواسطی کہ فرض کرو کہ

سہ و صہ و لہ . . . ہر ایک خاص ترتیبین ن اعداد ۱ و ۲ و ۳ . . . ن

کی تعبیر کرین تو ۱ا و سہ و ۲ا و صہ و ۳ا و لہ . . . ان وک ایک جز ترکیبی ہی جو اسطرح پیدا ہوتا ہے کہ اول جز ترکیبی مین دوسری عدد زیرین ۱ و ۲ . . . ن کو

سہ و صہ و لہ . . . سے بدل دین لیکن یہی جز ترکیبی اول جز ترکیبی

ا۱ و ا۲ و ۲۲ . . . ان ون سے بہی اسطرح استخراج ہوسکتا ہے کہ دوسری اعداد زیرین مین کچھ تبدل نہ کرین اور اول اعداد زیرین کو مناسب طور پر تبدیل کرین یعنی ا کو سہ سی اور ۲ کو صہ سے اور ۳ کو لہ سے . . . اور ن کو ہو سے

ان دونو طریقون سے جو استخراج ہوتا ہے اونمین دونو اعداد زیرین کے تبادل کی تعداد ایک ہی ہوتی ہی اور اسواسطی ایک ہی علامت جز ترکیبی کے اول موجب قاعدہ

دفعہ ۳۳۹ کے مقرر ہوتی ہے

(۳۴۳) اگر متواتر افقی صفون کو عمود صفون سی بدل دین تو مقطع کی قیمت مین کچھ فرق نہین پڑتا

ا۱ و۱ ا۱ و۲ ... ا۱ ون	=	ا۱ و۱ ا۲ و۱ ... ان و۱
ا۲ و۱ ا۲ و۲ ... ا۲ ون		ا۱ و۲ ا۲ و۲ ... ان و۲
. . .		
ان و۱ ان و۲ ... ان ون		ا۱ ون ا۲ ون ... ان ون

اسواسطے کہ یہہ ظاہر ہی موافق دفعہ ۳۴۰ کے اجزاء ترکیبی مقطعات کی برابر قیمت کی ہوتے ہین اور دفعہ ۳۴۲ کے موافق اونکی ایک ہی علامتین ہوتی ہین

(۳۴۴) اگر دو افقی صفین یا دو عمودی صفین آپسمین بدل جائین تو علامت مقطع کی تبدیل ہو جائیگی

فرض کرو کہ س مقطع معلوم کو تعبیر کرتا ہی اور سَ اوس مقطع کو جو تبادل سے پیدا ہوتا ہے تو اجزاء ترکیبی س اور سَ مین ایک ہی قیمت کی ہین اب صرف اونکی علامت ہی کا فیصلہ کرنا ہی سَ مین اول جزء ترکیبی س کی اول جزء ترکیبی سی اسطرح استخراج ہو سکتا ہے کہ دوسری اعداد زیرین مین سی دو کا تبادل کر دین اور ان اجزاء ترکیبی کی دونو مقطعات مین مختلف علامتین ہونگین تو ایک جزء ترکیبی سَ مین جو سَ کی اول جزء ترکیبی کے م تبادل سے دوسرے اعداد زیرین کی پیدا ہوتا ہی وہ اول جزء ترکیبی س کی م + ۱ تبادل سی پیدا ہو سکتا ہی اور اسیواسطی وہ س اور سَ مین مختلف العلامت ہوگا

(۳۴۵) اگر دو افقی صفین یا دو عمودی صفین متطابق ہون تو مقطعات معدوم ہو جائینگے

وجہ اسکی یہہ ہی کہ دو افقی صفین یا دو عمودی صفین جب باہم بدلین تو ایک مقطع س سے سَ بدل کر ہو جایگا لیکن اگر دو افقی صفین یا عمودی صفین متطابق ہون تو ان افقی صفون یا عمودی صفون کا تبادل کچھ تصرف مقطع مین نہین کریگا اور اسیواسطی س = سَ اور اسیواسطے س = ۰

(۳۴۶) جب تمام اجزا ذاتی سوا ایک کی کسی ایک افقی صف مین یا عمودی صف مین معدوم ہوجائین تو مقطع کی تحویل اوس حاصل ضرب کی طرف ہوجاتی ہے
جو رتبہ مابعد کے مقطع اور اوس جز ذاتی کے ضرب دینی سے پیدا ہوتا ہے
مثلاً اس مقطع پر خیال کرو

ا۱	ب۱	س۱	د۱
ا۲	ب۲	س۲	د۲
ا۳	ب۳	س۳	د۳
۰	۰	س۴	۰

اکیلی افقی صفون کی تین متواتر تبادل سی ہم اوس افقی صف کو جسمین س۴ ہی سب سے اوپر کی افقی صف مین لاتی ہین اور اکیلی عمودی صفون مین دو متواتر تبادل سی ہم اوس عمودی صف کو جسمین س۴ ہی اول عمودی صف مین لاتی ہین پس بموجب دفعہ ۳۴۴ کے

ا۱	ب۱	س۱	د۱
ا۲	ب۲	س۲	د۲
ا۳	ب۳	س۳	د۳
۰	۰	س۴	۰

= (−۱)۵

س۴	۰	۰	۰
س۱	ا۱	ب۱	د۱
س۲	ا۲	ب۲	د۲
س۳	ا۳	ب۳	د۳

اول جز ترکیبی بائین طرف س۴ ا۱ ب۲ د۳ ہی اور اور اجزا ترکیبی ایسے اعداد زیرین کی ترتیبون سی حاصل ہوسکتی ہین لیکن س۴ صرف ایک جز ذاتی ہے جسکا عدد زیرین ۴ ہی جو صفر نہین ہی اور صرف س۴ ہی ہر ایک جز ترکیبی کا جز ضربی ہوگا جو معدوم نہین ہوتا اور اور جز ضربی ا۱ ب۲ د۳ سے اعداد زیرین ۱ و ۲ و ۳ کے ترتیبون سے مستنبط ہوتی ہین پس اصل مقطع کی تحویل

(−۱)۵ س۴ ×

ا۱	ب۱	د۱
ا۲	ب۲	د۲
ا۳	ب۳	د۳

طریقہ اثبات کا یہی ہے خواہ مقطع مفروضہ کا کچھ ہی رتبہ ہو

اس مثال مین جو علامت منفی کی (-۱)^۵ سے پیدا ہوتی ہے اگر ہم چاہین تو اوسی اسطرح دور کرسکتی ہین کہ تیسری رتبہ کی مقطع مین دو افقی صفون کو یا دو عمودی صفون کو متبادل کردین

(۲۴۷) ن رتبی کی مقطع کی صف افقی جو سب سی اوپر ہو وہ ن - ۱ متواتر تبادل سی دو افقی صفون کی سب سی نیچی اسکتی ہی اور علی ہذا القیاس اول عمودی صف آخر عمودی صف کی ن - ۱ متواتر متبادل سی دو عمودی صفون کے بن سکتی ہی انہین سی ہر ایک کو دو تبادل کہتی ہین اور بعض اوقات عمودی یا افقی صفون کو زیادہ بالقرینہ بنانی کی واسطی اسمین آسانی ہوتی ہے کہ تبادل مفروضہ افقی صفون یا عمودی صفون کا دور تبادل کی تسلسل سی حاصل کرین

مثال گزشتہ مین ہم س۴ کو جس جگہ قائم کرنا چاہتی ہی اوس جگہ اسطرح لے آئی کہ تین متواتر دور تبادل افقی صفون کی اور دو متواتر دور تبادل عمودی سطرون کی لئی پس اصل مقطع کے واسطی یہہ متواتر صورتین حاصل ہوئین

(-۱)^۳ | ا۲ وب۲ وس۲ ود۲ ; ا۳ وب۳ وس۳ ود۳ ; ۰ و۰ وس۴ و۰ ; ا۱ وب۱ وس۱ ود۱ | (-۱)^۶ | ا۳ وب۳ وس۳ ود۳ ; ۰ و۰ وس۴ و۰ ; ا۱ وب۱ وس۱ ود۱ ; ا۲ وب۲ وس۲ ود۲ | (-۱)^۹ | ۰ و۰ وس۴ و۰ ; ا۱ وب۱ وس۱ ود۱ ; ا۲ وب۲ وس۲ ود۲ ; ا۳ وب۳ وس۳ ود۳ |

(-۱)^۱۲ | ۰ وس۴ و۰ و۰ ; ب۱ وس۱ ود۱ وا۱ ; ب۲ وس۲ ود۲ وا۲ ; ب۳ وس۳ ود۳ وا۳ | (-۱)^۱۵ | س۴ و۰ و۰ و۰ ; س۱ ود۱ وا۱ وب۱ ; س۲ ود۲ وا۲ وب۲ ; س۳ ود۳ وا۳ وب۳ | (-۱)^۱۵ س۴ | د۱ وا۱ وب۱ ; د۲ وا۲ وب۲ ; د۳ وا۳ وب۳ |

(۲۴۸) ہر ایک مقطع ہمیشہ ایک اعلی رتبہ کی مقطع کی صورت مین بیان ہوسکتا ہے

مثال بموجب ۰ و ۰ و ۳۴۷ کے

فر و ب۱ و س۱	=	ا و ۰ و ۰ و ۰		ا و ۰ و ۰ و ۰ و ۰	
فر و ب۲ و س۲		صہ و لر و ب۱ و س۱		لب و ا و ۰ و ۰ و ۰	
فر و ب۳ و س۳		لر و لر و ب۲ و س۲	=	ہر و صہ و ا۱ و ب۱ و س۱	
		فر و ا۳ و ب۳ و س۳		فر و لر و ا۲ و ب۲ و س۲	
				فر و فر و ا۳ و ب۳ و س۳	

اسمین صہ و لر و فر و لب و ہر و فر و فر کوئی سی مقدار ہو اور اسیطرح اس عمل کو جہان تک چاہیں پھیلا سکتے ہیں

(۳۴۶) فرض کرو کہ سے اور ک دو اعداد ترتیبی اعداد ا و ۲ و ۰ ۰ ن میں سی ہوں اور س مقطع مج ± ا۱ و ا۲ و ۳ ۰ ۰ ا ن و ن کو تعبیر کرتا ہے اور ا سے و ک امثال ا سے و ک کو س میں تعبیر کرتا ہے تو ہر ایک ان جملوں میں سے

ا سے و ا ا ک ۱ + ا سے و ۲ ا ک ۲ + ۰ ۰ ۰ + ا سے و ن ا ک و ن

اور ا ۱ و سے ا ۱ و ک + ا ۲ و سے ا ۲ و ک + ۰ ۰ ۰ + ا ن و سے ا ن و ک

برابر س کے اگر سے اور ک برابر ہوں اور برابر سفر کے اگر سے اور ک نا برابر ہوں اسواسطے کہ س کے ہر جزو ترکیبی میں الک ہر قطری ان اجزا ذاتی ا سے و ۱ و ا سے و ۲ و ۰ ۰ ۰ ا سے و ن میں سی ایک ہوتا ہے جو سے وین افقی قطار بناتا ہے اور چونکہ ا سے و ک امثال ا سے و ک کو س میں تعبیر کرتا ہے اسلئے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے

س = ا سے و ۱ ا سے و ۱ + ا سے و ۲ ا سے و ۲ + ۰ ۰ ۰ + ا سے و ن ا سے و ن

اور اسیطرح ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

س = ا ۱ و سے ا ۱ و سے + ا ۲ و سے ا ۲ و سے + ۰ ۰ ۰ + ا ن و سے ا ن و سے

س کے ان جملوں میں کی اوا کے لئے ہمیں ا سے و ۱ = ا ک و ۱ ، ا سے و ۲ = ا ک و ۲ ۰ ۰ ۰ اور علیٰ ہذا القیاس فرض کرو تو ا یا ہیئت ا ۱ ۳ ا ک ۳ ہو گا جسمیں دو افقی سطریں مطابق ہونگی اور اسلئے مقطع معدوم ہو جائیگا دفعہ ۳۴۳ کے صرف بموجب

(۳۵۰) اگر ایک افقی صف یا عمودی صف مین ہر یک جز و ذاتی کسی مقدار معلوم مین ضرب کیا ہے
تو وہ مقطع اوس مقدار مین ضرب کیا جاتا ہے،

فرض کرو کہ س = لے د۱ لے د۱ + لے د۲ لے د۲ + ۰۰ لے دن لے دن

اور ے دین افقی صف مین ہر یک رقم ع مین ضرب دیجائے تو ہم ع لے د۱ کو لے د۱ اور ع لے د۲ کو لے د۲ کی جگہ اور علی ہذا القیاس رکہین تو مقطع جدید کے واسطے ع گنا نتیجہ اول کا حاصل ہوگا

اور اسیطرح اس مسئلہ کو ثابت کر سکتے ہین اگر عمودی صف کی ہر یک رقم کسی مقدار معلوم مین ضرب کیا گیا ہے

(۳۵۱) اگر ایک افقی صف مین یا عمودی صف مین ہر یک جز و ذاتی مجموعہ م رقمون کا ہو تو مقطع کو مجموعہ م مقطعات کا خیال کر سکتے ہین

مثلاً فرض کرو کہ ے وین افقی صف کا ہر جز و ذاتی مجموعہ م ارقام کا ہو اور فرض کرو کہ

لے د۱ = ع۱ + ق۱ + ر۱ + ۰۰۰

لے د۲ = ع۲ + ق۲ + ر۲ + ۰۰۰

لے د۳ = ع۳ + ق۳ + ر۳ + ۰۰

تو س = لے د۱ لے د۱ + لے د۲ لے د۲ + ۰ ۰ ۰ + لے دن لے دن

= ع۱ لے د۱ + ع۲ لے د۲ + ۰ ۰ ۰ + عن لے دن

+ ق۱ لے د۱ + ق۲ لے د۲ + ۰ ۰ ۰ + قن لے دن

+ ر۱ لے د۱ + ر۲ لے د۲ + ۰ ۰ ۰ + رن لے دن

+

پس س کو مجموعہ اون م مقطعات کا خیال کر سکتے ہین جنمین جداگانہ ے وین افقی صفین یہہ ہین

ع۱ و ع۲ ۰ ۰ ۰ عن

ق۱ و ق۲ ۰ ۰ ۰ قن

ر۱ و ر۲ ۰ ۰ ۰ رن

(۳۵۲) اب یہہ بتلاینگے کہ لے د ک کے امثال کسی مقطع مین خود مقطع کی طرح نمایان ہوتے ہین مقطع کہ

اون اجزاء ترکیبی کے حاصل کرنے کی لیے جنمین ایک خاص جز ذاتی اے وک ملتف ہو اور وہی نقطہ ہو
تمام اجزاء ذاتی کوی وین صف افقی مین صفر سوا اے وک کے فرض کرو تو اے وک کے جگہ ا
رکہنی سے ہم کو امثال مطلوب حاصل ہونگے

مثلاً

اے وک =

ا۱و۱	. . .	ا۱وک-۱		ا۱وک+۱	. . .	ا۱ون
اے-۱و۱	. . .	اے-۱وک-۱	اے-۱وک	اے-۱وک+۱	. . .	اے-۱ون
اے+۱و۱	. . .	اے+۱وک-۱	اے+۱وک	اے+۱وک+۱	. . .	اے+۱ون
ان و۱	. . .	ان وک-۱	ان وک	ان وک+۱	. . .	ان ون

پس اے وک مقطع صورت مین نمایان ہوا اور وہ ن رتبہ کا ہی اے وک کے قیمت پر بغیر کسی اثر ہونے کے
ہم بجای ہر یک جز ذاتی کی ک وین صف عمودی سوا اے کے رکہہ سکتی ہین
بموجب دفعات ۳۴۶ یا دفعہ ۳۴۷ کے ہم اے وک کو مقطع (ن-۱) رتبے کا بنا سکتی ہین
پس ہم دفعہ ۳۴۷ کی ترکیب اختیار کر کے ے-۱ مدور تغیر ک-۱ افقی صفون مین اور
ک-۱ مدور تغیر عمودی صفون مین کر سکتی ہین اسیواسطے

اے وک = مر ×

اے+۱وک+۱	. . .	اے+۱ون	اے+۱و۱	. . .	اے+۱وک-۱
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
ان وک+۱	. . .	ان ون	ان و۱	. . .	ان وک-۱
ا۱وک+۱	. . .	ا۱ون	ا۱و۱	. . .	ا۱وک-۱
اے-۱وک+۱	. . .	اے-۱ون	اے-۱و۱	. . .	اے-۱وک-۱

اسمین مر = $(-۱)^{(ے-۱+ک-۱)(ن-۱)} = (-۱)^{(ے+ک)(ن-۱)}$

(۳۵۳) دفعات ۳۴۹ و ۳۵۲ کی استعانت سی ن رتبہ کی مقطع کو اسطرح بیان کر سکتی ہین کہ

مجموعہ اون ن رقموں کا ہو جنمیں سی ہر ایک حاصل ضرب ایک جز واقی اور (ن-۱) رتبی کی مقطع کا ہو اور (ن-۱) ویں رتبی کی مقطعات کا بیان اسطرح ہو سکتا ہی اور اس عمل کو جہان تک چاہو جاری رکہو مثلاً

| ا۱ ب۱ س۱ د۱ / ا۲ ب۲ س۲ د۲ / ا۳ ب۳ س۳ د۳ / ا۴ ب۴ س۴ د۴ | = ا۱ | ب۲ س۲ د۲ / ب۳ س۳ د۳ / ب۴ س۴ د۴ | − ب۱ | س۲ د۲ ا۲ / س۳ د۳ ا۳ / س۴ د۴ ا۴ | + س۱ | د۲ ا۲ ب۲ / د۳ ا۳ ب۳ / د۴ ا۴ ب۴ | − د۱ | ا۲ ب۲ س۲ / ا۳ ب۳ س۳ / ا۴ ب۴ س۴ |

= ا۱ { ب۲ | س۳ د۳ / س۴ د۴ | + س۲ | د۳ ب۳ / د۴ ب۴ | + د۲ | ب۳ س۳ / ب۴ س۴ | }

− ب۱ { س۲ | د۳ ا۳ / د۴ ا۴ | + د۲ | ا۳ س۳ / ا۴ س۴ | + ا۲ | س۳ د۳ / س۴ د۴ | }

+ س۱ { د۲ | ا۳ ب۳ / ا۴ ب۴ | + ا۲ | ب۳ د۳ / ب۴ د۴ | + ب۲ | د۳ ا۳ / د۴ ا۴ | }

− د۱ { ا۲ | ب۳ س۳ / ب۴ س۴ | + ب۲ | س۳ ا۳ / س۴ ا۴ | + س۲ | ا۳ ب۳ / ا۴ ب۴ | }

(۳۵۴) اب ہم اس مضمون کا ایک مطلب عظیم لکہتی ہیں اور وہ مقطعات کی ضرب سی متعلق ہے فرض کرو کہ رموز کی دو سلک ہوں یعنی

ا۱ د۱ . . . ا۱ ن د ع ن
ا۲ د۱ . . . ا۲ ن د ع ن
ب۱ د۱ . . . ب۱ ن د ع ن
. . . .
ب ن د۱ . . . ب ن ن د ع ن

ان سی فرض کرو کہ ایک تیسری سلک رموز بنائی گئی

س١ و١ ۔ ۔ س١ و ن

س ن و١ ۔ ۔ س ن و ن

ان رموز کا فیصلہ قطعی اس ارتباط عام سے ہوگا کہ

س١ و ک = ١ و١ ب ک و١ + ١ و٢ ب ی و٢ + ۔ ۔ ۔ + ١ وع ب ک وع

فرض کرو کہ ح = س١ و١ س٢ و٢ ۔ ۔ س ن و ن کو س تعبیر کرتا ہے تو ہم نتایج ذیل ثابت کرینگے

(١) فرض کرو کہ ع چھوٹا بہ نسبت ن کے ہے تو س = ۰

(٢) فرض کرو کہ ع = ن تو س برابر حاصل ضرب اون دو مقطعات کے ہوگا جو دو سلک رموز سے کہ موافق اپنی اوسی ترتیب کے لیجائیں شامل ہوتے ہیں

(٣) فرض کرو کہ ع بڑا بہ نسبت ن کی ہی تو س برابر ہوگا اون ازواج مقطعات کے حاصل ضرب اون کی مجموعہ کی جنمیں سی ہر زوج مقطعات کا اسطرح بنا ہی کہ ن عمودی صفین یا معلوم سلک رموز سی ایک مقطع مین لیں اور اوسکے مطابق ن عمودی صفین دوسرے معلوم سلک رموز مین سی دوسرے مقطع کی لئی لیں

اول جزو ترکیبی س کا س١ و١ س٢ و٢ ۔ س ن و ن ہی اور اسکی قیمت یہہ ہے کہ

(ح ١ و ب ١ و) (ح ١ و ص و ب ٢ و ص) (ح ١ و ط ب ٣ و ط) ۔ ۔ ۔

اسمین اول جزو ضربی ہے ح اوس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہی جو بلحاظ ر کے لیا جاے اور دوسرا جزو ضربی ہے ح اوس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہی جو بلحاظ ص کی لیا جاے اور تیسرا جزو ضربی ہے ح اوس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہی جو بلحاظ ط کے لیا جاے اور علی ہذا القیاس اور یہہ مجموعی ایسی ع تک پہنچتی ہین اور یہہ دونوں ویکین داخل ہیں

پس حاصل ضرب اس جملہ کے قیمتوں کے مجموعہ لینے سے دریافت ہو سکتا ہے کہ

١ و ر ٢ و ص ۔ ۔ ۔ ١ و ر ٢ و ص ٣ ص و ط ۔ ۔ ۔

جبکہ ر و ص، و ط ۔ ۔ کی تمام صحیح قیمتیں ا ی ع تک لیجائیں

اب ہم اس مجموعہ کو

ح و ص و ط ۔ ۔ ۔ (١ و ر ٢ و ص ٣ و ط ۔ ۔ ۔ ١ و ر ٢ و ص ٣ ص و ط ۔ ۔ ۔)

اور س کے اور اجزاء ترکیبی سی اسطرح حاصل ہو سکتی ہین کہ دوسرے اعداد زیرین کی ترتیبین لین اور مناسب علامت مقرر کرین اب تمام قیمت س اے وں سی یہہ استخراج ہوتا ہی کہ رمز س کے دوسری اعداد زیرین کو بدلنی سی کوئی تغیر رمز ا کے اعداد زیرین مین نہین آتا لیکن رمز ب کے اول اعداد زیرین بدل جاتی ہین اور صرف یہی بدلتی ہین اسی ہم ایک نتیجہ نکالتی ہین جو اسطرح تعبیر ہو سکتا ہے

س = ح ر وص وط ... (ا۱ اور ا۲ وص ا۳ وط ... ح ± ب۱ اور ب۲ وص ب۳ وص وط ...)

یہان ح ± ب۱ اور ب۲ وص ب۳ وط ... سی ق رتبی کا مقطع دوسری معلوم سلک رموز سے خاص افقی صفون کی لینی سی بنتا ہی اور ح کا مرجع اول اعداد زیرین کی تغیرات ہین دفعہ ۳۴۴ کو دیکھو اس مقطع کو ن سی تعبیر کرتی ہین اب اول فرض کرو کہ ع چھوٹا بہ نسبت ن کے ہی تو اعداد زیرین ر وص وط ... تعداد مین ن ہین اور کوئی اونمین سی ن سے بڑا نہین ہے اسی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ اونمین ہمیشہ دو یا زیادہ دو سی ایک ہی قیمت رکھتے ہین پس ن ہمیشہ بموجب دفعہ ۳۴۵ کے معدوم ہوتا ہے اور اسیواسطی س معدوم ہوتا ہے

دوم فرض کرو کہ ع = ن تو نظم اعداد زیرین کا ر ص ط ... ایک ترتیب ن رموز ا ۲ ... ن کی ہوگی اور وہ کچھ نہ ہوگی جب تک ق کو معدوم نہ کرین اب متواتر مختلف ترتیبون کی لینی سی علامت ق کی تبدیل ہوگی مگر اوسکی قیمت بموجب دفعہ ۳۴۴ کے نہین بدلیگی پس قیمت س کی تحویل اوس حاصل ضرب کی طرف ہوگی جو اوس مقطع کو دوسرے معلوم سلک رموز سی بنانا چاہئی مجموعہ تمام اجزاء ترکیبی ہین جو ح ± ا۱ و۱ ا۲ و۲ ... ان ون سے تعبیر ہوتی ہین ضرب دینی سی پیدا ہوا اسمین ح کا مرجع دوسرے اعداد زیرین کے تغیرات ہین اسیواسطی جب ع = ن

س = | ا۱ و۱ ... ا۱ ون ؛ ان و۱ ... ان ون | × | ب۱ و۱ ... ب۱ ون ؛ بن و۱ ... بن ون |

اب آخر فرض کرو کہ ع بڑا بہ نسبت ن کی ہی تو نظم اعداد زیرین ر ص ط . . . ا اجتماع ن اعداد کی ع اعداد ا و ۲ . . . ع مین سی ہوگی اور تعداد ایسی اجتماعون کی (ل ع) / (ل ن ل ع – ن) ہوگی فرض کرو کہ ق کے معنی موافق سابق کے ہون ب کو اسی بدلتی ہین جو ق ہوجای اوسکو ع سی تعبیر کرو اسی معلوم ہوا کہ موافق دوسری صورت کی ہم کو س کے ایک رقم کی واسطی ر ع ق حاصل ہوگا اور یہہ اسطرح پیدا ہوتا ہے کہ (ل ع) / (ل ن ل ع – ۱) مین سی ممکن محدود اجتماع منتخب کرلین اسیواسطی جب ع بڑا بہ نسبت ن کے ہے تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ س = ح ع ق اسمین ح مجموعہ (ل ع) / (ل ن ل ع – ن) ارقام کا ہے جو ممکن اجتماعون سی پیدا ہوتا ہے

(۳۵۵) دفعہ گذشتہ کی دوسری صورت مین ہم دیکھتی ہین کہ حاصل ضرب ن رتبی کی دو مقطعات کا ن ہی رتبہ کی مقطع مین نمایان ہوسکتا ہی اور علی ہذا القیاس حاصل ضرب ن رتبی کی تین مقطعات کا ن ہی رتبہ کی مقطع مین نمایان ہوسکتا ہی اسواسطی کہ اول ہم ن رتبی کی دو مقطعات کی حاصل ضرب کو ن رتبی کے مقطع صورت مین نمایان کرسکتی ہین اور اس جدید مقطع اور اصل مقطعات مین سے تیسرے مقطع کو ن رتبی کی مقطع کی صورت مین ظاہر کرسکتی ہین پس ہم دیکھتی ہین کہ حاصل ضرب تعداد مقطعات کا جو ایکہی رتبی کے ہون اوسی رتبی مین نمایان ہوسکتا ہے اسی معلوم ہوا کہ اگر حاصل ضرب مقطعات کا خواہ کسی رتبی کے ہون اور کتنی ہون اوسی رتبے کے مقطع کے صورت مین اور اجزاء ضربی کی اعلی رتبہ کے مقطع کے صورت مین بہی نمایان ہوسکتا ہی اسواسطی کہ بموجب دفعہ ۳۴۸ کی اور سب مقطعات مثل اعلی رتبے کے مقطع کی بن سکتی ہین اور جب یہہ بن جائین تو ان مقطعات کا حاصل ضرب اوسے رتبے کے مقطع کی صورت مین بن سکتی ہین

(۳۵۶) فرض کرو کہ ہم کو حاصل ضرب دو مقطعات کا بنانا ہے

| ا١و١ . . . ا١ون |
| ان و١ . . . ان ون |

اور

| ب١و١ . . . ب١ون |
| بن و١ . . . بن ون |

بموجب دفعہ ۳۴۳ کی ہم متواتر افقی صفوں کو عمود صفوں میں خواہ ایک میں یا دونوں مقطعات میں بدل سکتے ہیں
پس اگر اس حاصل ضرب کو سطح تعبیر کریں

| س١و١ . . . س١ون |
| سن و١ . . . سن ون |

اب ہم نئی اجزاء ذاتی چار طریقوں سے بناتی ہیں اسلئے کہ ہم قوانین ذیل میں سے جس قانون کو چاہیں اختیار کریں

س ی و ک = ا ی و١ ب ک و١ + ا ی و٢ ب ک و٢ + . . + ا ی ون ب ک ون

یا س ی و ک = ا ی و١ ب و١ ک + ا ی و٢ ب و٢ ک + . . + ا ی ون ب ون ک

یا س ی و ک = ا١ وی ب ک و١ + ا٢ وی ب ک و٢ + . . + ان وی ب ک ون

یا س ی و ک = ا١ وی ب١ وک + ا٢ وی ب٢ وک + . . + ان وی ب ن وک

(۳۵۷) فرض کرو کہ ا ی وک اپنا ا ی وک کو مقطع س میں تعبیر کریں تو نظم رموز

ا١و١　ا١و٢ . . . . ا١ون

ا٢و١　ا٢و٢ . . ا٢ون

ان و١　ان و٢ . . ان ون

کو نظم متکافیہ رموز

ا١و١　ا١و٢ . . ا١ون

ا٢و١　ا٢و٢ . . ا٢ون

ان و١　ان و٢ . . ان ون

کا کہتے ہیں

(۳۵۸) ایک نظم کا مقطع جو متکافی نظم مفروضہ ن رموز کا ہو وہ (ن-۱) ویں قوت کا مقطع نظم مفروضہ کا ہوتا ہے

اگر ہم ان مقطعات کو ضرب دیں

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{\text{۱و۱}} & \cdots & \text{ا}_{\text{۱ون}} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{ا}_{\text{ن و۱}} & \cdots & \text{ا}_{\text{ن ون}} \end{vmatrix}$$

اور

$$\begin{vmatrix} \text{ک}_{\text{۱و۱}} & \cdots & \text{ک}_{\text{۱ون}} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{ک}_{\text{ن و۱}} & \cdots & \text{ک}_{\text{ن ون}} \end{vmatrix}$$

تو حاصل ضرب کے واسطے یہہ حاصل ہوگا

$$\begin{vmatrix} \text{س}_{\text{۱و۱}} & \cdots & \text{س}_{\text{۱ون}} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{س}_{\text{ن و۱}} & \cdots & \text{س}_{\text{ن ون}} \end{vmatrix}$$

اسمیں $\text{س}_{\text{ی ر}} = \text{ا}_{\text{ی و۱}}\,\text{ک}_{\text{ر و۱}} + \text{ا}_{\text{ی و۲}}\,\text{ک}_{\text{ر و۲}} + \cdots + \text{ا}_{\text{ی ون}}\,\text{ک}_{\text{ر ون}}$

اس سے معلوم ہوا کہ موافق دفعہ ۳۴۹ کے آخر مقطع کی اجزاء دائی کی قیمت س ہوگی اگر ی اور ر برابر ہیں یا صفر ہوگی اگر ی اور ر غیر مساوی ہیں پس یہہ مقطع اپنی اول جزء ترکیبی $\text{س}_{\text{۱و۱}}\,\text{س}_{\text{۲و۲}} \cdots \text{س}_{\text{ن ون}}$ یعنی $\text{س}^{\text{ن}}$ کی طرف تحویل ہوتی ہے اسواسطے

$$\text{س}\begin{vmatrix} \text{ا}_{\text{۱و۱}} & \cdots & \text{ا}_{\text{۱ون}} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{ا}_{\text{ن و۱}} & \cdots & \text{ا}_{\text{ن ون}} \end{vmatrix} = \text{س}^{\text{ن}}$$

اسواسطے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{\text{۱و۱}} & \cdots & \text{ا}_{\text{۱ون}} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{ا}_{\text{ن و۱}} & \cdots & \text{ا}_{\text{ن ون}} \end{vmatrix} = \text{س}^{\text{ن-۱}}$$

(۳۵۹) فرض کرو کہ ایک ن رتبہ کا مقطع س ہے اور ر مز کے صریح ہیں جو اوس کو تعبیر کرے

م افقی صفین اور م عمودی صفین معدوم ہوں اور باقی رموز کو سر کا کر ایک رمز کے جدید مربع میں لکھیں جو ن — م رتبی کا مقطع ہی تو اس مقطع کو مقطع جزئیہ یا مقطع اصغر بلحاظ اصلی مقطع کی کہتی ہیں اور رموز جو مشترک افقی اور عمودی صفوں میں ہوتی ہیں اون سے ایک مربع رمز کا بنیگا جو ایک مقطع م رتبی کا ہوگا یہہ بہی مقطع جزئیہ یا مقطع اصغر ہے ان دو مقطعات جزئیہ یا اصغر کو ایک دوسری کا متمم کہتے ہیں

(۳۶۰) ن رتبی کی مقطع کو س تعبیر کرتا ہی م رتبہ کا مقطع جزئیہ نظم متکافیہ کا تعداداً برابر ہوتا ہی حاصل ضرب ر$^{م-۱}$ اور اصل نظم کے مقطع جزئیہ متمم کے

فرض کرو کہ ت و ح د ... ر و ص ایک ترتیب اعداد ۱ و ۲ ... ن کو تعبیر کرتا و ے و ک و ... لو و مو دوسری ترتیب کو تعبیر کریں اور ت و ح ... اور ے و ک ... اور م ہر ایک کو م عددوں کی جماعت فرض کرو اور ر و ص ... اور لو و مو ... کو ن — م عددوں کی جماعتیں فرض کردیں

| ا ت و ے و ا ت و ک ...
| ا ح و ے و ا ح و ک

مقطع جزئیہ نظم متکافیہ کا م رتبہ کا ہے اسکو **ص** سے تعبیر کرو

اب | ا ت و ے و ا ت و ک ... ا ت و لو و ا ت و مو ...
| ا ح و ے و ا ح و ک ... ا ح و لو و ا ح و مو ...
| ....
| ا ر و ے و ا ر و ک ... ا ر و لو و ا ر و مو
| ا ص و ے و ا ص و ک ... ا ص و لو و ا ص و مو ... | = مرس

مراسمیں +۱ ہی اگر ترتیبیں ت و ح و ... ر و ص اور ے و ک ... لو و مو کی ایک ہی نوع کی ہوں اور -۱ ہی اگر اونکی ترتیبیں مختلف نوع کی ہوں

اب ہم ان دو مقطعات کا حاصل ضرب دریافت کرتے ہیں بموجب دفعہ ۳۴۸ کی اجزاء ذاتی از دیاد کسی مقطع **ص** کا ن رتبہ پر صعود کر سکتا ہی پس م بجای **ص** کے

مقطع ذیل لکھتی ہین

اف وے	اف وک . . .	اف ولو	اف ومو . . .
اح وے	اح وک . . .	اح ولو	اح ومو . . .
ب ر وے	ب ر وک . . .	ب ر ولو	ب ر ومو . . .
ب ص وے	ب ص وک . . .	ب ص ولو	ب ص ومو . . .

اسمین سب مع اعداد زیرین کی جن اجزاء ذاتی کو بتعبیر کرتا ہی صفر مقرر کی گئی ہین مگر وہ اجزاء ذاتی مستثنی ہین جو قطر مین لکھی ہین وہ سب برابر واحد کے فرض کئی گئی ہین

اب حاصل ضرب ص اور مر س کا بنا تو وہ ایک جدید مقطع ن رتبے کا ہوگا فرض کرو کہ اجزاء ذاتی اس جدید مقطع کو حرف س مع دو اعداد زیرین کے تعبیر کرے اور ان اعداد زیرین مین سی موافق دستور کی ایک افقی صف کو اور دوسرا عمودی صف کو تعبیر کرے بموجب دفعہ ۳۵۶ کی چار طریقے ہین جنسی ہم حاصل ضرب ص اور مر س کے اجزاء ذاتی کو دریافت کر سکتے ہین انھین سی اول طریقہ کو ہم اختیار کرتے ہین اس طریقہ کے موافق س ع و ق اسطرح حاصل ہوتا ہی کہ ص کی ع وین افقی صف کے اجزاء ذاتی کو جدا گانہ مر س کی ق وین افقی صف مین ضرب دین تو

س ۱،۱ = اف وے اف وے + اف وک اف وک + . . . + اف ولو اف ولو + اف ومو اف ومو + . .

س ۱،۲ = اف وے اح وے + اف وک اح وک + . . . + اف ولو اح ولو + اف ومو اح ومو + . .

اسیواسطی بموجب دفعہ ۳۴۹ کے س ۱،۱ و س ۲،۲ . . . س م،م برابر س کے حاصل ہونگے اور باقی اور اجزاء ذاتی اوس مقطع کے م افقی صفون کے جو ص اور مر س سی حاصل ہوتا ہے صفر ہونگے

(م+۱) وین صف مین اول رقم کے واسطے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

س م+۱،۱ = ب ر وے اف وے + ب ر وک اف وک + . . . + ب ر ومو اف ومو + . . . = اف ولو

اسواسطی کہ ب مع اعداد زیرین کے جو واقع ہوتی ہین جن رموز کو تعبیر کرتا ہے

وہ صفر ہین مگر ب ر د لو واحد ہی اور اسیطرح (م + ۱) افقی صف ہین دوسرے رقم
یہہ ہم کو حاصل ہوتی ہے کہ

س م+۱ و م+۲ = لح و لو

اسیطرح عمل کرنے سی ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ (م+۱) وین افقی صف حاصل ضرب
ص اور مر ر مین وہی ہی جو مر ر مین (م+۱) وین صف ہے
علی ہذا القیاس (م+۲) وین افقی صف حاصل ضرب مین وہی ہے جو (م+۲) وین عمودی صف مر ر مین ہے،
پس مقطع جو مساوی لہ ص مر ر کا ہو بموجب دفعہ ۳۴۶ کے تحویل اوس حاصل ضرب کی
طرف ہو سکتا ہی جو ر اور ذیل کے (ن - م) رتبہ کے مقطع کو ضرب دینے سے پیدا ہوتا ہے

لر د لو　لر د مود . . . .

لص و لو　لص و مود . . . .

ص = مر ر-۱ | لر د مود　لر د لو د . . . |
| لص و لو　لص و مو . . . . |

(۳۶۱) امثلہ ذیل طالب علم ثابت کری امثلہ (۴) و (۵) (۶) مین ہم نی وہ مقطعات کہی ہین
جنکے اجزاء ذاتی خود مقطعات ہین

(۱)
| ۰　و سہ　و صہ　و لر |
| سہ و ۰　و لر۱　و صہ۱ |
| صہ و لر۱ و ۰　و سہ۱ |
| لر و صہ۱ و سہ۱ و ۰ |
= سہ۲ سہ۱۲ + صہ۲ صہ۱۲ + لر۲ لر۱۲ - ۲ سہ سہ۱ صہ صہ۱ - ۲ سہ سہ۱ لر لر۱ - ۲ صہ صہ۱ لر لر۱

(۲)
| ۰　و سہ　و صہ　و لر |
| -سہ و ۰　و لر۱　و صہ۱ |
| -صہ و -لر۱ و ۰　و سہ۱ |
| -لر و -صہ۱ و -سہ۱ و ۰ |
= (سہ سہ۱ - صہ صہ۱ + لر لر۱)۲

(۳)

| ر و سہ و صہ و لر |
| -سہ و ر و لر۱ و صم |
| -صہ و -لر۱ و ر و سہ۱ |
| -لر و -صم و -سہ۱ و ر |

= ر^۴ + ر^۲ (سہ^۲ + صہ^۲ + لر^۲ + سہ۱^۲ + صم^۲ + لر۱^۲) + (سہ سہ۱ - صہ صم + لر لر۱)^۲

(۴)

‖ |س و ج ; ح و ا| , |ح و ا ; ن و ھ| ; |ح و ا ; ف و ھ| , |ا و ھ ; ح و ب| ‖ = ا | ا و ھ و ح ; ھ و ب و ف ; ح و ف و س |

(۵)

| |ح و ا ; ف و ھ| . |ف و س ; ھ و ح| ; |ا و ھ ; ھ و ب| , |ھ و ب ; ح و ف| | = ھ | ا و ھ و ح ; ھ و ب و ف ; ح و ف و س |

(۶)

	ب و ف ; ف و س	,	ف و س ; ھ و ح	,	ھ و ب ; ح و ف	
	ف و س ; ھ و ح	,	س و ج ; ح و ا	,	ح و ا ; ف و ھ	
	ھ و ب ; ح و ف	,	ح و ا ; ف و ھ	,	ا و ھ ; ھ و ب	

= مجذور | ا و ھ و ح ; ھ و ب و ف ; ح و ف و س |

(۷)

|ا و ب ; ا۱ و ب۱| |س و د ; س۱ و د۱| + |ب و س ; ب۱ و س۱| |ا و د ; ا۱ و د۱| + |س و ا ; س۱ و ا۱| |ب و د ; ب۱ و د۱| =

ستائیسواں باب

استوا مقطعات

(۳۶۲) فرض کرو ن مقادیر مجہول لا۱ و لا۲ ۔ ۔ ۔ لان کی قیمتین ان ن مساواتون سی دریافت کرنے ہین

ا۱ لا۱ + ا۱و۲ لا۲ + ا۱و۳ لا۳ + ۔ ۔ ۔ + ا۱ون لان = لو۱

ا۲و۱ لا۱ + ا۲و۲ لا۲ + ا۲و۳ لا۳ + ۔ ۔ ۔ + ا۲ون لان = لو۲

ان و۱ لا۱ + ان و۲ لا۲ + ان و۳ لا۳ + ۔ ۔ ۔ + ان ون لان = لون

فرض کرو کہ س مقطع ہی ± ا۱ د۱ ا۲ و۲ ۔ ان ون کو تعبیر کرتا ہی اور اکے وک امثال اکے وک کو س مین تعبیر کرتی ہین تو قیمتین مقادیر مجہول کی اس صورت قانونی سے معلوم ہونگی

س لاک = لو۱ ا۱ وک + لو۲ ا۲ وک + ۔ ۔ ۔ + لون ان وک

اسمین ک کوئی قیمت درمیان ۱ اور ن کے ہی اور یہہ دونو اونمین داخل ہین اسواسطی کہ معلوم مساواتون کو جدا گانہ ا۱ وک و ا۲ وک ۔ ۔ ان وک مین ضرب دو اور حاصل ضربون کو جمع کرو تو امثال لاک کے

ا۱ وک ا۱ وک + ا۲ وک ا۲ وک + ۔ ۔ ۔ + ان وک ان وک

یہہ بموجب دفعہ ۳۴۹ کے برابر س کے ہین اور امثال لار کے

ا۱ ور ا۱ وک + ا۲ ور ا۲ وک + ۔ ۔ ۔ + ان ور ان وک

اور یہہ بموجب دفعہ ۳۴۹ کے صفر ہین

اوس صورت قانونی کو جسسے لاک معلوم ہو اسطرح لکہ سکتی ہین

س لاک = ص

اسمین ص ایک مقطع ہی یعنی وہ مقطع ہی جو اسطرح بنتا ہی کہ س سے ک وین افقی صفین س کے ساقط کرین اور اونکی جگہ وہ عمودی صف رکہین جو لو۱ و لو۲ ۔ ۔ لون سی مرتب ہوتی ہی

(۳۶۳) فرض کرو کہ مقطع س فنا ہوتا ہی تو قیمتین مقادیر مجہول کی غیر متناہی ہو جائینگی اسی یہہ معلوم ہوگا کہ مساواتین معلومہ غیر مطابق ہین جبر و مقابلہ کا بتدریج [illegible]

(۳۶۴) فرض کرو کہ لو۱ لو۲ ۔۔۔ لون معدوم ہوتے ہین اور س بہی فنا ہوتا ہے تو دفعہ ۳۶۲ کے ترکیب سی مقادیر مجہول غیر المعین صورت ۰/۰ کی ہوجائیگی اس صورت مین ہم ن-۱ مساواتین معلوم مساواتون مین سی لین تو نسبت ن-۱ مقادیر مجہول کی باقی مقدار مجہول کی ساتہہ دریافت کرنی کی واسطی یہہ مساواتین کافی ہونگین

یہہ نسبتین بہی ایک دفعہ معین ہو سکتی ہین اسواسطی کہ ہم کو یہہ حاصل ہو سکتا ہے کہ

لا۱ : لا۲ : لا۳ : ۔۔۔ = ل/ے و۱ : ل/ے و۲ : ل/ے و۳ : ۔۔۔

اسمین ے ایک صحیح عدد ہے اور ن سے بڑا نہیں ہے

دلیل اس سبب سے کہ س = ۰ تو بموجب دفعہ ۳۴۹ کے ے اور ک کی تمام صحیح قیمتون ۱ اور ن کے درمیان ہونگین

لک و۱ ل/ے و۱ + لک و۲ ل/ے و۲ + لک و۳ ل/ے و۳ + ۔۔۔ = ۰

اور جب لا۱ و لا۲ و لا۳ ۔۔۔ اوپر کی نسبت معینہ کے موافق لی گئی ہین تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ل/ے و۱ لا۱ + لک و۲ لا۲ + لک و۳ لا۳ + ۔۔۔ = ۰

معلوم مساواتون مین سی ن-۱ مساواتین لین اور لو۱ و لو۲ ۔۔۔ لو۳ ہر ایک کو برابر صفر کے فرض کرین تو ہم کو اکثر اکیلی محدود قیمت ہر ایک (ن-۱) مقادیر مجہول اور باقی مقدار مجہول مین نسبت معلوم ہوجائیگے

اسی یہہ استخراج ہوتا ہے کہ جب س = ۰ تو

ل/ے و۱ : ل/ے و۲ : ل/ے و۳ : ۔۔۔

بالکل بے دگاؤ سے ہین

(۳۶۵) اگر لو۱ و لو۲ ۔۔۔ لون تمام معدوم ہوجائین اور س فنا نہ ہو تو نظم مساوات کا دفعہ ۳۶۲ مین کوئی حل نہین رکہتا الا اوس حالت مین کہ لا۱ و لا۲ و لا۳ ۔۔۔ لان تمام صفر ہون شرط س = ۰ ضروری تا کہ مقادیر مجہول کی قیمتین جو صفر نہ ہون دریافت ہو جائین

(۳۶۶) معادلات

$$\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{ء} + \text{س}_1\text{ی} = 0$$

$$\text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{ء} + \text{س}_2\text{ی} = 0$$

$$\text{ا}_3\text{لا} + \text{ب}_3\text{ء} + \text{س}_3\text{ی} = 0$$

مین حل کی قابلیت جو صفر نہ ہو جب ہوگی کہ ہم کو یہہ حاصل ہو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix} = 0$$

اگر یہہ شرط پوری ہوتی ہو تو معادلات کی شرائط بھی اسی پوری ہونگین کہ

$$\text{لا} : \text{ء} : \text{ی} :: \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{س}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{س}_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{س}_2 & \text{ا}_2 \\ \text{س}_3 & \text{ا}_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 \end{vmatrix} \text{ و}$$

$$\text{یا لا} : \text{ء} : \text{ی} :: \begin{vmatrix} \text{ب}_3 & \text{س}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{س}_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{س}_3 & \text{ا}_3 \\ \text{س}_1 & \text{ا}_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{ا}_3 & \text{ب}_3 \\ \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \end{vmatrix} \text{ و}$$

$$\text{یا لا} : \text{ء} : \text{ی} :: \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{س}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{س}_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{س}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{س}_2 & \text{ا}_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$$

یہہ تینوں صورتین حل کی موافق دفعہ ۳۶۴ کے ایک دوسرے کے ساتھہ منطبق ہوتی ہین

(۳۶۷) دفعہ ۳۶۲ کے معادلات سے ہم یہہ استنباط کرتے ہین کہ

$$\text{لو}_1 \text{ا}_{1\text{و}1} + \text{لو}_2 \text{ا}_{2\text{و}1} + \text{لو}_3 \text{ا}_{3\text{و}1} + \cdots + \text{لو}_\text{ن} \text{ا}_{\text{ن و}1} = \text{سا لا}_1$$

$$\text{لو}_1 \text{ا}_{1\text{و}2} + \text{لو}_2 \text{ا}_{2\text{و}2} + \text{لو}_3 \text{ا}_{3\text{و}2} + \cdots + \text{لو}_\text{ن} \text{ا}_{\text{ن و}2} = \text{سا لا}_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\text{لو}_1 \text{ا}_{1\text{و ن}} + \text{لو}_2 \text{ا}_{2\text{و ن}} + \text{لو}_3 \text{ا}_{3\text{و ن}} + \cdots + \text{لو}_\text{ن} \text{ا}_{\text{ن و ن}} = \text{سا لا}_\text{ن}$$

فرض کرو کہ مقطع ح = ± ل۱ ا۱ ل۲ و۲ ... لن ون کو عر تعبیر کرتا ہے

سے وک امثال لے وک کو جو عر ین ہو تعبیر کرتا ہی اور ہر کے مساواتون سے

قیمتین لو۱ و لو۲ ... لون کی دریافت کر سکتی ہین اور دفعہ ۳۶۲ کی طرح عمل کر کے

ہم کو یہہ نتیجہ عامہ حاصل ہوگا

عر لوک = س { لا۱ اک و۱ + لا۲ سہ ک و۲ + ... + لان سہ ک ون }

دفعہ ۳۶۲ کے مساوات معلوم سی اس نتیجہ کے مقابلہ کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

اک و۱ لا۱ + اک و۲ لا۲ + ... + اک ون لان = لوس

چونکہ قیمتین لوس کی متطابقہ مین

س سہ ک وے / عر = اک وے

لیکن عر = رن-۱ بموجب دفعہ ۳۵۸ کے پس

سہ ک وے = رن-۲ اک وے

(۳۶۸) اب ہم ایک اور سوال مین مقطعات کا استعمال کرتی ہین یعنی اونکی استعانت سی مقادیر معلومہ کے فرقون کا حاصل ضرب دریافت کرتے ہین

فرض کرو کہ ن مقادیر س۱ و س۲ و ... سن سی تعبیر کیجائین اور ع اوس حاصل ضرب کو تعبیر کرے جو اون فرقون کی ضرب دینی سی پیدا ہو جو ان ن مقادیر مین سی ہر ایک کو اوسکی ماقبل کی مقدار سے تفریق کرنے سے پیدا ہون یعنی

ع = (س۲ − س۱)(س۳ − س۱) ... (سن − س۱)(س۳ − س۲)(س۴ − س۲) ... (سن − سن-۱)

تو ع مقطع ن رتبہ کا پیدا ہو سکتا ہی اسواسطی کہ اس مقطع پر خیال کرو

۱ و س۱	و $س۱^۲$	...	$س۱^{ن-۱}$
۱ و س۲	و $س۲^۲$	...	$س۲^{ن-۱}$
۱ و سن-۱	و $سن-۱^۲$	...	$سن-۱^{ن-۱}$

یہہ مقطع ایک جملہ ناطقہ صحیحہ مقادیر س_1 و س_2 ۔ ۔ $\text{س}_\text{ن}$ کا ہی اور وہ بموجب دفعہ ۳۴۵ کے معدوم ہوتا ہی اگر کوئی دو اونمین سی برابر ہوں اسواسطی وہ اوس حاصل ضرب سے جس کو ع سی تعبیر کیا ہی تقسیم ہو سکتا ہی اور یہہ اور نیز مقطع اور حاصل ضرب ع دونو $\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2}$ درجہ کے قوا اور حواصل ضرب س_1 و س_2 ۔ ۔ $\text{س}_\text{ن}$ مین ہین اسیواسطی اب مقطع کو ع پر تقسیم کرین تو کوئی عدد خارج قسمت ہوگا اور یہہ عدد چاہیی کہ واحد ہو کیونکہ یہہ اول جز ترکیبی مقطع کو اون اجزا ضربی ثنائی کے حاصل ضرب کے اول ارقام سی مقابلہ کرکے ہم دیکھتی ہین اور ع ان اجزا ضربی سی مرکب ہے

(۳۶۹) ن رتبی کے مقطع مین $\underline{\text{ن}}$ رقمین ہین حاصل ضرب ع مین پہلی مختصر ہونے سے اور محو ہونی سی بہت سی رقمین ہونگین یعنی $\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2}$ پس کثرت ارقام کی بچنی کی لئی مقطع بڑی فایدہ مند صورت حاصل ضرب کے واسطے ہے

(۳۷۰) ہم کو حاصل ہے کہ

$$\text{ع}^2 = \begin{vmatrix} 1 \text{ و } \text{س}_1 \text{ و } \text{س}_1^2 \text{ و } \cdots \text{س}_1^{\text{ن}-1} \\ 1 \text{ و } \text{س}_2 \text{ و } \text{س}_2^2 \text{ و } \cdots \text{س}_2^{\text{ن}-1} \\ \cdot \\ 1 \text{ و } \text{س}_\text{ن} \text{ و } \text{س}_\text{ن}^2 \cdots \text{س}_\text{ن}^{\text{ن}-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \text{ و } \text{س}_1 \text{ و } \text{س}_1^2 \text{ و } \cdots \text{س}_1^{\text{ن}-1} \\ 1 \text{ و } \text{س}_2 \text{ و } \text{س}_2^2 \cdots \text{س}_2^{\text{ن}-1} \\ 1 \text{ و } \text{س}_\text{ن} \text{ و } \text{س}_\text{ن}^2 \cdots \text{س}_\text{ن}^{\text{ن}-1} \end{vmatrix}$$

اب حاصل ضرب ان مقطعات کا ایکہی مقطع کی صورت مین نمایان ہو سکتا ہے۔ دفعہ ۳۶۵ مین جو چار ترکیبین لکھی ہین اونمین سی آخر ترکیب کے اختیار کرنے سے

$$\text{ع}^2 = \begin{vmatrix} \text{ص}_0 \text{ و } \text{ص}_1 \text{ و } \text{ص}_2 \cdots \text{ص}_{\text{ن}-1} \\ \text{ص}_1 \text{ و } \text{ص}_2 \text{ و } \text{ص}_3 \cdots \text{ص}_\text{ن} \\ \cdot \\ \text{ص}_{\text{ن}-1} \text{ و } \text{ص}_\text{ن} \text{ و } \text{ص}_{\text{ن}+1} \cdots \text{ص}_{2\text{ن}-2} \end{vmatrix}$$

اسمین $\text{ص}_\text{ا} = \text{س}_1^\text{ا} + \text{س}_2^\text{ا} + \cdots \text{س}_\text{ن}^\text{ا}$

(۳۷۱) مثلاً فرض کرو کہ س_1 و س_2 ۔ ۔ $\text{س}_\text{ن}$ قیمتین ن درجہ کی ایک مساوات کی ہین تو ع^2

قیمتوں کے فرقوں کی حاصل ضرب کا مجذور ہوگا پس مساوات کی قیمتوں کی فرقوں کے مجذور ایک مقطع کی صورت میں نمایاں ہوسکتی ہیں اور اس مقطع کے اجزاء ذاتی مساوات معلوم کی امثال میں معلوم ہونگے اسواسطی کہ ص ۱ امثال کی رقموں میں بیان ہوسکتا ہی

(۳۷۲) فرض کرو کہ ن مقادیر مجہولہ لا۱ و لا۲ . . لان کی قیمتیں ہم ان مساواتوں سی دریافت کرتی ہیں کہ

$$\text{لا}_1+\text{لا}_2+\text{لا}_3+\cdots+\text{لا}_\text{ن}=1$$

$$\text{لا}_1\text{س}_1+\text{لا}_2\text{س}_2+\text{لا}_3\text{س}_3+\cdots+\text{لا}_\text{ن}\text{س}_\text{ن}=\text{ط}$$

$$\text{لا}_1\text{س}_1^2+\text{لا}_2\text{س}_2^2+\text{لا}_3\text{س}_3^2+\cdots+\text{لا}_\text{ن}\text{س}_\text{ن}^2=\text{ط}^2$$

$$\text{لا}_1\text{س}_1^{\text{ن}-1}+\text{لا}_2\text{س}_2^{\text{ن}-1}+\text{لا}_3\text{س}_3^{\text{ن}-1}+\cdots+\text{لا}_\text{ن}\text{س}_\text{ن}^{\text{ن}-1}=\text{ط}^{\text{ن}-1}$$

قیمتیں مقادیر مجہولہ کی اس صورت قانونی سی معلوم ہوا کرینگے کہ

$$\text{لا}_\text{ے}=\frac{(\text{س}_1-\text{ط})(\text{س}_2-\text{ط})\cdots(\text{س}_{\text{ے}-1}-\text{ط})(\text{س}_{\text{ے}+1}-\text{ط})\cdots(\text{س}_\text{ن}-\text{ط})}{(\text{س}_1-\text{س}_\text{ے})(\text{س}_2-\text{س}_\text{ے})\cdots(\text{س}_{\text{ے}-1}-\text{س}_\text{ے})(\text{س}_{\text{ے}+1}-\text{س}_\text{ے})\cdots(\text{س}_\text{ن}-\text{س}_\text{ے})}$$

اسواسطی کہ بموجب دفعہ ۳۶۲ کے

$$\text{ی}\,\text{لا}_1=\text{ص}_1$$

اسمیں ی =

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 & \cdots & \text{س}_\text{ن} \\ \text{س}_1^2 & \text{س}_2^2 & \text{س}_3^2 & \cdots & \text{س}_\text{ن}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{س}_1^{\text{ن}-1} & \text{س}_2^{\text{ن}-1} & \text{س}_3^{\text{ن}-1} & \cdots & \text{س}_\text{ن}^{\text{ن}-1} \end{vmatrix}$$

اور ص =

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \text{س}_1 & \cdots & \text{س}_{\text{ے}-1} & \text{ط} & \text{س}_{\text{ے}+1} & \cdots & \text{س}_\text{ن} \\ \text{س}_1^2 & \cdots & \text{س}_{\text{ے}-1}^2 & \text{ط}^2 & \text{س}_{\text{ے}+1}^2 & \cdots & \text{س}_\text{ن}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{س}_1^{\text{ن}-1} & \cdots & \text{س}_{\text{ے}-1}^{\text{ن}-1} & \text{ط}^{\text{ن}-1} & \text{س}_{\text{ے}+1}^{\text{ن}-1} & \cdots & \text{س}_\text{ن}^{\text{ن}-1} \end{vmatrix}$$

اب فرض کرو کہ ے ویں عمودی صف ی میں اول رکھی جاوی اور ے ویں عمودی صف ص میں اول رکھی جاوی دفعہ ۳۴۷ کو دیکھو پھر بموجب دفعہ ۳۶۸ کے دونو

مقطعات فرقون کے حواصل ضرب سی بدل جائین اور اجزا ضربی شمار کنندہ اور نسب نما مین بخوبی اجائین تو لا ے کی قیمت اوپر کی صورت معینہ مین ہم کو معلوم ہوگی

(۳۷۳) مساوات معلوم سی خاص مقادیر کے ساقط کرنی سی ایک مساوات حاصل کرنی کی اندر بہی ترکیب مقطعات کی کام اتی ہی فرض کرو کہ معادلات ح (لا) = ۰ اور حٓ (لا) = ۰ مین ہم کو لا ساقط کرتا ہے اسمین

$$\text{ح}(\text{لا}) = \text{ا}_0 + \text{ا}_1\text{لا} + \text{ا}_2\text{لا}^2 + \text{ا}_3\text{لا}^3$$

$$\text{حٓ}(\text{لا}) = \text{ب}_0 + \text{ب}_1\text{لا} + \text{ب}_2\text{لا}^2$$

اب ہم عمل اسطرح کرتے ہین کہ

$$\text{ح}(\text{لا}) = \text{ا}_0 + \text{ا}_1\text{لا} + \text{ا}_2\text{لا}^2 + \text{ا}_3\text{لا}^3$$

$$\text{لا ح}(\text{لا}) = 0 + \text{ا}_0\text{لا} + \text{ا}_1\text{لا}^2 + \text{ا}_2\text{لا}^3 + \text{ا}_3\text{لا}^4$$

$$\text{حٓ}(\text{لا}) = \text{ب}_0 + \text{ب}_1\text{لا} + \text{ب}_2\text{لا}^2$$

$$\text{لا حٓ}(\text{لا}) = 0 + \text{ب}_0\text{لا} + \text{ب}_1\text{لا}^2 + \text{ب}_2\text{لا}^3 + 0$$

$$\text{لا}^2\text{حٓ}(\text{لا}) = 0 + 0 + \text{ب}_0\text{لا}^2 + \text{ب}_1\text{لا}^3 + \text{ب}_2\text{لا}^4$$

فرض کرو کہ س =

ا_0	ا_1	ا_2	ا_3	۰
۰	ا_0	ا_1	ا_2	ا_3
ب_0	ب_1	ب_2	۰	۰
۰	ب_0	ب_1	ب_2	۰
۰	۰	ب_0	ب_1	ب_2

اور چونکہ بموجب فرض کے خ (لا) اور مح (لا) صفر ہین اسواسطی لا ح (لا) و د لا مح (لا)
اور لا (مح لا) بہی صفر ہین تو بموجب دفعہ ۳۵۵ کی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ س = کی ہونا
ایک ضروری شرط ہی جو مثال ح (لا) اور مح (لا) مین ہونی چاہیئی

(۳۷۴) ہم نے ایک خاص مثال تحقیقات عامہ کی دفعہ گذشتہ مین لکہی تہی اب ہم اوسکو
اسطرح لکہتی ہین کہ وہ زیادہ سمجہہ مین اوی فرض کرو کہ

$$ح\,(لا) = ا_. + ا_۱\,لا + ا_۲\,لا^۲ + \cdots + ا_م\,لا^م = ۰$$

$$مح\,(لا) = ب_. + ب_۱\,لا + ب_۲\,لا^۲ + \cdots + ب_ن\,لا^ن = ۰$$

اب ان مساواتون مین سی لا کو ساقط کرنا ہے اب ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

$$ح\,(لا) = ا_. + ا_۱\,لا + ا_۲\,لا^۲ + \cdots + ا_م\,لا^م$$

$$لا\,ح\,(لا) = ا_.\,لا + ا_۱\,لا^۲ + ا_۲\,لا^۳ + \cdots + ا_م\,لا^{م+۱}$$

$$لا^{ن-۱}\,ح\,(لا) = \quad ا_.\,لا^{ن-۱} + \quad ا_م\,لا^{ن} + \cdots$$

$$مح\,(لا) = ب_. + ب_۱\,لا + ب_۲\,لا^۲ + \cdots + ب_ن\,لا^ن$$

$$لا\,مح\,(لا) = \quad ب_.\,لا + ب_۱\,لا^۲ + \cdots + ب_{ن-۱}\,لا^ن + ب_ن\,لا^{ن+۱}$$

$$لا^{م-۱}\,مح\,(لا) = \quad ب_.\,لا^{م-۱} + ب_۱\,لا^م + \cdots$$

فرض کرو کہ م + ن رتبی کی مقطعات کو س تعبیر کرتا ہی جسکی اول ن صفین یہہ ہین کہ

$$ا_.\,،\,ا_۱\,،\,ا_۲\,\ldots\,ا_م\,،\,۰\,،\,۰\,،\,۰\,\ldots$$

$$۰\,،\,ا_.\,،\,ا_۱\,\ldots\,ا_{م-۱}\,،\,ا_م\,،\,۰\,،\,۰$$

$$۰\,،\,۰\,،\,ا_.\,\ldots\,ا_{م-۲}\,،\,ا_{م-۱}\,،\,ا_م\,\ldots$$

اور اسکے بعد م افقی صفین یہہ ہین

$$ب_.\,،\,ب_۱\,،\,ب_۲\,\ldots\,ب_ن\,،\,۰\,،\,۰\,،\,۰$$

$$۰\,،\,ب_.\,،\,ب_۱\,\ldots\,ب_{ن-۱}\,،\,ب_ن\,،\,۰\,،\,۰$$

$$۰\,،\,۰\,،\,ب_.\,\ldots\,ب_{ن-۲}\,،\,ب_{ن-۱}\,،\,ب_ن\,،\,۰$$

نوٹ = ایک ضرور ارتباط امثال مین ہونا چاہیی تاکہ مح (لا) اور صح (لا) ایک ہی وقت مین معدوم ہون

(۳۷۵) ایک جبریہ جملہ کو جو دوسرے جملہ پر تقسیم کرنے سے خارج قسمت پیدا ہوتا ہے اوسکو مقطع کی صورت مین نمایان کرسکتے ہین

فرض کرو کہ $\text{مح}(\text{لا}) = \text{ا}_{0}\,\text{لا}^{\text{م}} + \text{ا}_{1}\,\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{\text{م}-2} + \dots + \text{ا}_{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{م}-\text{ر}} + \dots$

$\text{صح}(\text{لا}) = \text{ب}_{0}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_{1}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_{2}\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \dots + \text{ب}_{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}} + \dots$

اور خارج قسمت جو مح (لا) کو صح (لا) پر تقسیم کرنے سے پیدا ہو اوسے

$\text{ق}_{0}\,\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}} + \text{ق}_{1}\,\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}-1} + \dots + \text{ق}_{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}-\text{ر}} + \dots$

$$\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{1}{\text{ب}_{0}^{\text{ر}+1}} \begin{vmatrix} \text{ب}_{0} & 0 & 0 & 0 & \dots & \text{ا}_{0} \\ \text{ب}_{1} & \text{ب}_{0} & 0 & 0 & \dots & \text{ا}_{1} \\ \text{ب}_{2} & \text{ب}_{1} & \text{ب}_{0} & 0 & \dots & \text{ا}_{2} \\ \text{ب}_{3} & \text{ب}_{2} & \text{ب}_{1} & \text{ب}_{0} & \dots & \text{ا}_{3} \\ \text{ب}_{\text{ر}} & \text{ب}_{\text{ر}-1} & \text{ب}_{\text{ر}-2} & \dots & \dots & \text{ا}_{\text{ر}} \end{vmatrix}$$

اور یہہ امتحان سے ثابت ہوسکتا ہے کہ ر = ۰ یا ۱ یا ۲ کے ہو اور علی العموم استقراء سے ثابت ہوسکتا ہے مثلاً ہم فرض کرتے ہین کہ ق_{0} و ق_{1} و ق_{2} و ق_{3} اور ق_{4} اس قاعدہ کی موافق مناسب طور پر دریافت ہوجائین اور ہم یہہ ثابت کرنا چاہتے ہین کہ ق_{5} بھی ایسا ہے

صح (لا) کو خارج قسمت مین ضرب دو اور مح (لا) کے مساوی لکھو تو یہہ دریافت ہوگا

$$\text{ا}_{5} = \text{ق}_{0}\text{ب}_{5} + \text{ق}_{1}\text{ب}_{4} + \text{ق}_{2}\text{ب}_{3} + \text{ق}_{3}\text{ب}_{2} + \text{ق}_{4}\text{ب}_{1} + \text{ق}_{5}\text{ب}_{0} \quad \dots(1)$$

اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ ہم نے جو کچھ ق_{5} کے واسطے حاصل کیا ہی وہ مطابق اوسکی ہے جو مقطع سی دریافت ہوا ہی فرض کرو کہ س مقطع کو تعبیر کرتا ہے تو

ر ب. = ۱/ب۶.

ب.	و ۰	و ۰	و ۰	و ۰	و ا.
ب۱	و ب.	و ۰	و ۰	و ۰	و ا۱
ب۲	و ب۱	و ب.	و ۰	و ۰	و ا۲
ب۳	و ب۲	و ب۱	و ب.	و ۰	و ا۳
ب۴	و ب۳	و ب۲	و ب۱	و ب.	و ا۴
ب۵	و ب۴	و ب۳	و ب۲	و ب۱	و ا۵

= ۱/ب۶. { - ص۵ ب۵ + ص۴ ب۴ - ص۳ ب۳ + ص۲ ب۲ - ص۱ ب۱ + ص. ا۵ }

اسمین ص۵ و ص۴ و ص۳ و ص۲ و ص۱ و ص. مقطعات ہین جو س سے اسطرح پیدا ہوتی ہین کہ ہمیشہ اخر صف افقی کو اور ایک عمودی صف کو متواتر محو کرتے ہین پس

ص. =

۰	و ۰	و ۰	و ۰	و ا.
ب.	و ۰	و ۰	و ۰	و ا۱
ب۱	و ب.	و ۰	و ۰	و ا۲
ب۲	و ب۱	و ب.	و ۰	و ا۳
ب۳	و ب۲	و ب۱	و ب.	و ا۴

=

ا.	و ۰	و ۰	و ۰	و ۰
ا۱	و ب.	و ۰	و ۰	و ۰
ا۲	و ب۱	و ب.	و ۰	و ۰
ا۳	و ب۲	و ب۱	و ب.	و ۰
ا۴	و ب۳	و ب۲	و ب۱	و ب.

بموجب دفعہ ۴۴۳ کے پس دفعہ ۴۴۶ کو بار بار کام مین لاکر ہم کو ا. ب۴. کی قیمت مقطع کی حاصل ہوگی پس

ص۵ / ب۵. = ا. / ب. = ق.

پھر ص۴ =

ب.	و ۰	و ۰	و ۰	و ا.
ب۱	و ۰	و ۰	و ۰	و ا۱
ب۲	و ب.	و ۰	و ۰	و ا۲
ب۳	و ب۱	و ب.	و ۰	و ا۳
ب۴	و ب۲	و ب۱	و ب.	و ا۴

= -

ب.	و ا.	و ۰	و ۰	و ۰
ب۱	و ا۱	و ۰	و ۰	و ۰
ب۲	و ا۲	و ب.	و ۰	و ۰
ب۳	و ا۳	و ب۱	و ب.	و ۰
ب۴	و ا۴	و ب۲	و ب۱	و ب.

بموجب دفعہ ۴۴۳ کے اب دفعہ ۴۶۳ کی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ب.} & \text{وا.} & \text{و.} & \text{و.} \\ \text{ب}_1 & \text{وا}_1 & \text{و.} & \text{و.} \\ \text{ب}_2 & \text{وا}_2 & \text{وب.} & \text{و.} \\ \text{ب}_3 & \text{وا}_3 & \text{وب}_1 & \text{و.} \\ \text{ب}_4 & \text{وا}_4 & \text{وب}_2 & \text{وب.} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب.} & \text{وا.} \\ \text{ب}_1 & \text{وا}_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{ب.} & \text{و.} & \text{و.} \\ \text{ب}_1 & \text{وب.} & \text{و.} \\ \text{ب}_2 & \text{وب}_1 & \text{وب.} \end{vmatrix}$$

$$\text{پس ص}_4 = -\begin{vmatrix} \text{ب.} & \text{وا.} \\ \text{ب}_1 & \text{وا}_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{ب.} & \text{و.} & \text{و.} \\ \text{ب}_1 & \text{وب.} & \text{و.} \\ \text{ب}_2 & \text{وب}_1 & \text{وب.} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \text{ب.} & \text{وا.} \\ \text{ب}_1 & \text{وا}_1 \end{vmatrix} \text{ب.ب.}^2 = -\text{ق}_1\text{ب.}^5$$

$$\text{اسواسطے} \quad \frac{\text{ص}_4}{\text{ب.}^5} = -\text{ق}_1$$

$$\text{پھر ص}_3 = \begin{vmatrix} \text{ب.} & \text{و.} & \text{و.} & \text{و.} & \text{وا.} \\ \text{ب}_1 & \text{وب.} & \text{و.} & \text{و.} & \text{وا}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{وب}_1 & \text{و.} & \text{و.} & \text{وا}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{وب}_2 & \text{وب.} & \text{و.} & \text{وا}_3 \\ \text{ب}_4 & \text{وب}_3 & \text{وب}_1 & \text{وب.} & \text{وا}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب.} & \text{و.} & \text{وا.} \\ \text{ب}_1 & \text{وب.} & \text{وا}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{وب}_1 & \text{وا}_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{ب.} & \text{و.} \\ \text{ب}_1 & \text{وب.} \end{vmatrix} = \text{ق}_2\text{ب.}^5$$

$$\text{اسواسطے} \quad \frac{\text{ص}_3}{\text{ب.}^5} = \text{ق}_2$$

$$\text{اسیطرح} \quad \frac{\text{ص}_2}{\text{ب.}^5} = \text{ق}_3$$

$$\frac{\text{ص}_1}{\text{ب.}^5} = \text{ق}_4$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{ص.}}{\text{ب.}^5} = 1$$

$$\text{پس ی ب.} = -\text{ق.ب}_5 - \text{ق}_1\text{ب}_4 - \text{ق}_2\text{ب}_3 - \text{ق}_3\text{ب}_2 - \text{ق}_4\text{ب}_1 + \text{ا}_5 \quad (۲)$$

پس اسی ہم یہہ دیکھتے ہیں کہ (۲) سی جو ص دریافت ہوا وہ بالکل مطابق ق کے قیمت کے ہی جو (۱) سے دریافت ہوئی تھی اور یہی ثابت کرنا تھا ترکیب جو ق کی نسبت ہم کام میں لائے

وہ عام ہی اور اسیواسطی جو ق کی قیمت اوپر تشخیص ہوئی ہی وہ صحیح اور درست ہے

(۳۷۷) اب ہم دو مثالون پر خاتمہ کرتے ہین

(۱) فرض کرو کہ مقطع ن + ۱ رتبہ کا ہو جسمین تمام اجزار ذاتی برابر واحد کے ہون الا وہ جو قطر کا سلسلہ بناتی ہین یعنی ہین اور وہ ۱ + ا۱ و ۱ + ا۲ ۰ ۰ ۱ + ان ہین تو قیمت اس مقطع کی ا۱ ا۲ ۰ ۰ ان ہے

اسواسطی کہ اگر مقادیر ا۱ و ا۲ ۰ ۰ ان مین سی ایک معدوم ہو تو مقطع معدوم ہوتا ہے کیونکہ اوسکی دو افقی صفین مطابق ہوتی ہین اسواسطی مقطع ا۱ ا۲ ۰ ۰ ان پر تقسیم ہوتا ہی اور خارج قسمت اس تقسیم کا واحد ہوگا کیونکہ یہہ اول جزء ترکیبی کی دیکھنی سی معلوم ہوتا ہی

(۲) فرض کرو کہ ن رتبی کا مقطع ہی جسمین تمام اجزار ذاتی سوا اوس سلسلہ قطر کے واحد ہین اور اس سلسلہ قطر مین ۱ + ا۱ و ۱ + ا۲ ۰ ۰ ۱ + ان ہین تو قیمت مقطع کی یہہ ہوگی کہ

$$ا_۱ ا_۲ \cdot \cdot ا_ن \left[۱ + \frac{۱}{ا_۱} + \frac{۱}{ا_۲} + \cdot \cdot \cdot + \frac{۱}{ا_ن} \right]$$

اسواسطے اگر مقادیر ا۱ و ا۲ ۰ ۰ ان مین سی کوئی ایک معدوم ہو جاے تو مقطع کی صورت پہلی مثال کی ایک صورت بنجایگی اور رقم ا۱ ا۲ ۰ ۰ ان اول جزء ترکیبی مقطع پر خیال کرنے سے دریافت ہوتی ہے

مثالین

باب ۱

(۱) جب $لا^۵ + ۷ لا^۴ + ۳ لا^۳ + ۱۷ لا^۲ + ۱۰ لا - ۱۴$ کو $لا - ۴$ پر تقسیم کرین تو باقی اور خارج قیمت دریافت کرو

(۲) $(ا + لا)^ن$ کو قوائے لا مین پہلا کر اول جملہ مشتقہ $(ا + لا)^ن$ کا دریافت کرو

(۳) ثابت کرو کہ مساوات $لا^۴ + ۳ لا^۲ + لا - ۶ = ۰$ کی صرف ایک ہی قیمت ۱ اور ۲ کے درمیان ہوگی

باب ۳

(۱) مساوات $لا^{۴} = \pm \sqrt{-۱}$ کی ایک قیمت دریافت کرو

(۲) مساوات $لا^{۶} = -\sqrt{-۱}$ کی ایک قیمت دریافت کرو

باب ۳

(۱) وہ مساوات بناؤ جسکی قیمتیں ۱ و ۱ و -۱ و -۲ ہوں

(۲) وہ مساوات بناؤ جسکی قیمتیں $۱ \pm \sqrt{-۲}$ اور $۲ \pm \sqrt{-۳}$

(۳) اٹھویں درجہ کی مساوات ایسی بناؤ جسکی قیمت $\sqrt{۲} + \sqrt{۳ + \sqrt{-۱}}$ ہو

(۴) ان مساواتوں کو حل کرو مساوات کی ایک قیمت معلوم ہے

(۱) $لا^{۳} - لا^{۲} + ۳لا + ۵ = ۰$ اور قیمت معلوم $۱ - ۲\sqrt{-۱}$

(۲) $لا^{۴} + ۴لا^{۳} + ۶لا^{۲} + ۴لا + ۵ = ۰$ اور قیمت معلوم $\sqrt{-۱}$

(۳) $لا^{۴} + لا^{۳} - ۲۵لا^{۲} + ۴۱لا + ۶۶ = ۰$ اور قیمت معلوم $\sqrt{۳} + \sqrt{-۳}$

(۴) $لا^{۴} + ۲لا^{۳} - ۴لا^{۲} - ۴لا + ۴ = ۰$ قیمت معلوم $\sqrt{۲}$

(۵) $لا^{۴} - ۲لا^{۳} - ۵لا^{۲} - ۶لا + ۲ = ۰$ قیمت معلوم $۲ + \sqrt{۳}$

(۶) $لا^{۶} - لا^{۵} - ۸لا^{۴} + ۲لا^{۳} + ۲۱لا^{۲} - ۹لا - ۵۴ = ۰$ قیمت $\sqrt{۲} + \sqrt{-۱}$

(۵) مساوات $لا^{۵} - لا^{۴} + ۸لا^{۲} - ۹لا - ۱۵ = ۰$ کو حل کرو ایک قیمت اوسکی $\sqrt{۳}$ اور دوسری قیمت $۱ - ۲\sqrt{-۱}$ ہے

(۶) مساوات $لا^{۳} - ۴لا^{۲} + لا + س = ۰$ کی ایک قیمت $= ۳$ اور قیمتیں اور س دریافت کرو

(۷) مساوات $لا^{۶} - ۶لا^{۵} + ۴۰لا^{۳} + ۶۰لا^{۲} - لا - ۱ = ۰$ کی متکافی قیمتوں کا مجموعہ اور قیمتوں کی مجذوروں کا مجموعہ اور متکافی قیمتوں کی مجذوروں کا مجموعہ دریافت کرو

(۸) مساوات $لا^{۴} - ۲۱لا^{۳} + ۱۶۶لا^{۲} - ۵۸۶لا + ۵۸۰ = ۰$ کی قیمتیں سہ اور صہ اور $سہ + صہ + (سہ - صہ)\sqrt{-۱}$ کی صورت کی ہیں مساوات کو حل کرو

(۹) مساوات معلوم کی قیمتوں کے مکعبوں کا مجموعہ دریافت کرو

(۱۰) وہ مساوات دریافت کرو جنکی قیمتین سہ و صہ و رہ و فر

۱/۲ (۱ + مسہ ± √(مسہ ۲ − ۲ مسہ − ۳)) اور ۱/۲ (۱ − مسہ ± √(مسہ ۲ + ۲ مسہ − ۳)) ہین اور یہ بھی ثابت کرو کہ

(سہ² + صہ²)/(سہ صہ) + (سہ² + رہ²)/(سہ رہ) + ۰۰۰ = ۰

(۱۱) اگر طہ و صہ و سہ قیمتین ایک مساوات کی ہون تو قیمت

طہ²/صہ² + طہ²/سہ² + ۰۰۰ + صہ²/طہ² + صہ²/سہ² + ۰۰۰

کی دریافت کرو

(۱۲) کچھ مثبت مقادیر ہین اور اونکا اوسط حسابیہ بڑا اوسط ہندسیہ سے ہی تو ثابت کرو کہ

ع۱² − ۲ع۲ چھوٹا ہے ع۰² سے ہی اور مساوات کی ناممکن قیمتین ہین

(۱۳) اگر طہ و صہ و سہ ۰ قیمتین مساوات کی ہون تو ثابت کرو کہ

(۱ − ع۲ + ع۴ − ۰۰)² + (ع۱ − ع۳ + ع۵ − ۰۰)² = (۱ + طہ²) (۱ + صہ²) (۱ + سہ²) ۰۰

باب ۴

(۱) ذیل کی مساواتون کو ہیت بدل کر ایسی مساواتین بناؤ کہ جنکی قیمتین اصل مساوات کی قیمتون پر ایک عدد معین کی زیادہ کرنے سے پیدا ہون

(۱) لا⁵ − ۳لا⁴ − لا² + ۴ = ۰ و ۱ (۲) لا⁴ + لا + ۱ = ۰ و ۳

(۳) لا⁵ + ۴لا³ − لا² + ۱۱ = ۰ و −۳

(۲) ذیل کی مساواتون کو ایسی مساواتون مین تبدیل کر دو کہ اونکی دوسری رقم نہ ہو

(۱) لا³ − ۳لا² + ۴لا − ۴ = ۰ (۲) لا³ − ۶لا² + ۱۲لا + ۱۹ = ۰

(۳) لا⁴ − ۸لا³ + ۵ = ۰ (۴) لا⁵ + ۵لا⁴ + ۳لا³ + لا² + لا − ۱ = ۰

(۳) ذیل کی مساواتون کو ایسی دوسری مساواتون سی تبدیل کرو کہ اونمین تیسری رقم نہ ہو

(۱) لا⁴ + ۵لا³ + ۸لا − ۱ = ۰ (۲) لا³ − ۶لا² + ۹لا − ۱۰ = ۰

(۳) لا⁴ − ۸لا³ + ۱۸لا² − ۱۵لا + ۱۴ = ۰ (۴) لا⁶ − ۱۸لا³ − ۶۰لا² + لا − ۲ = ۰

(۴) مساوات $\text{لا}^{3} + 3\text{لا}^{2} + \frac{1}{4}\text{لا} + \frac{1}{9} = 0$ کی صورت بدل کے ایسی مساوات بناؤ کہ امثال اوسکی اعداد صحاح ہوں اور اول رقم کا سر ایک ہو

(۵) دوسری رقم کو دور کرو اور اس مساوات کو حل کرو

$$\text{لا}^{3} - 18\text{لا}^{2} + 157\text{لا} - 510 = 0$$

(۶) ذیل کی مساواتوں میں سے ہر ایک مساوات کی ہیئت اسطرح تبدیل کرو کہ اوسکی قیمتیں مجذور مساوات کی قیمتوں کی تفاوت کا ہوں اور قیمتوں کی خواص پر بحث لکھو

(۱) $\text{لا}^{3} + 7\text{لا} - 1 = 0$ (۲) $\text{لا}^{3} - 6\text{لا} + 6 = 0$

(۷) $\text{لا}^{4} - 2\text{لا}^{2} + 12\text{لا} - 3 = 0$ کی ہیئت بدل کر ایسی مساوات بناؤ کہ جسکی قیمتیں تکافی مساوات معلوم کی قیمتوں کی ہوں اور ہیئت بدلی ہوئی جو مساوات حاصل ہوا اوسکی قیمتوں کو بقدر واحد کے کم کرو

(۸) ثابت کرو کہ مساوات $\text{لا}^{4} + \text{لا}^{2} - 8\text{لا} - 15 = 0$ کی دو حقیقی قیمتیں مختلف العلامت ہیں اور دو سے زیادہ اوسکی حقیقی قیمتیں نہیں ہیں اور وہ -2 اور 3 کے درمیان واقع ہیں

(۹) مساوات $\text{لا}^{3} + \text{ع}\,\text{لا}^{2} + \text{ق}\,\text{لا} + \text{ر} = 0$ کی قیمتیں ط و ص و س سے تعبیر ہوتی ہیں اس مساوات کی ہیئت بدل کر اور مساواتیں بناؤ جنکی قیمتیں معینہ بہ تفصیل ذیل ہو

(۱) ط^{2} و ص^{2} و س^{2} (۲) $\text{ص} + \text{س}$ و $\text{س} + \text{ط}$ و $\text{ط} + \text{ص}$

(۳) $\frac{1}{\text{ص}+\text{س}}$ و $\frac{1}{\text{س}+\text{ط}}$ و $\frac{1}{\text{ط}+\text{ص}}$ (۴) $\frac{\text{ط}}{\text{ص}\,\text{س}}$ و $\frac{\text{ص}}{\text{س}\,\text{ط}}$ و $\frac{\text{س}}{\text{ط}\,\text{ص}}$

(۵) $\text{ص}^{2}\text{س}^{2}$ و $\text{س}^{2}\text{ط}^{2}$ و $\text{ط}^{2}\text{ص}^{2}$ (۶) $\overline{\text{ہا}(\text{ک}\,\text{ط})}$ و $\overline{\text{ہا}(\text{ک}\,\text{ص})}$ و $\overline{\text{ہا}(\text{ک}\,\text{س})}$

(۷) $\frac{1}{2}(\text{ص} + \text{س} - \text{ط})$ و $\frac{1}{2}(\text{س} + \text{ط} - \text{ص})$ و $\frac{1}{2}(\text{ط} + \text{ص} - \text{س})$

(۸) $\frac{\text{ط}}{\text{ص}+\text{س}}$ و $\frac{\text{ص}}{\text{س}+\text{ط}}$ و $\frac{\text{س}}{\text{ط}+\text{ص}}$ (۹) $\frac{\text{ط}}{\text{ص}+\text{س}-\text{ط}}$ و $\frac{\text{ص}}{\text{س}+\text{ط}-\text{ص}}$ و $\frac{\text{س}}{\text{ط}+\text{ص}-\text{س}}$

(۱۰) $\text{ص}\,\text{س} + \frac{1}{\text{ط}}$ و $\text{س}\,\text{ط} + \frac{1}{\text{ص}}$ و $\text{ط}\,\text{ص} + \frac{1}{\text{س}}$ (۱۱) $\text{ص}^{2} + \text{س}^{2}$ و $\text{س}^{2} + \text{ط}^{2}$ و $\text{ط}^{2} + \text{ص}^{2}$

(۱۲) $\frac{\text{ص}}{\text{س}} + \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ و $\frac{\text{س}}{\text{ط}} + \frac{\text{ط}}{\text{س}}$ و $\frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{\text{ط}}$ (۱۳) $\frac{\text{ص}^{2}+\text{س}^{2}}{\text{ص}^{2}\,\text{س}^{2}}$ و $\frac{\text{س}^{2}+\text{ط}^{2}}{\text{س}^{2}\,\text{ط}^{2}}$ و $\frac{\text{ط}^{2}+\text{ص}^{2}}{\text{ط}^{2}\,\text{ص}^{2}}$

(۱۴) $\text{ص} - \text{س}$ و $\text{س} - \text{ص}$ و $\text{س} - \text{ط}$ و $\text{ط} - \text{س}$ و $\text{ط} - \text{ص}$ و $\text{ص} - \text{ط}$

(۱۰) مساوات لا^{۳} + ق لا + ر = ۰ قیمتیں ط و ص و س ہیں اسکی ہیئت بدل کر اور مساواتیں بناؤ جنکی قیمتیں معینہ بہ تفصیل ذیل ہوں

(۱) $\left(\frac{ط}{ص-س}\right)^{۲}$ و $\left(\frac{ص}{س-ط}\right)^{۲}$ و $\left(\frac{س}{ط-ص}\right)^{۲}$

(۲) ص ط + ط س و س ص + ص ط و ط س + س ص

(۱۱) اگر مساوات لا^{۳} − ۶ لا^{۲} + ۱۱ لا − ۶ = ۰ کی قیمتیں ط و ص و س ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی قیمتیں

$\frac{۱}{ص^{۲}+س^{۲}}$ و $\frac{۱}{س^{۲}+ط^{۲}}$ و $\frac{۱}{ط^{۲}+ص^{۲}}$ ہوں

(۱۲) اگر لا^{۳} − ۲ لا^{۲} + ۲ = ۰ کی قیمتیں ط و ص و س ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی قیمتیں $\frac{ص^{۳}+س^{۳}}{ط^{۳}}$ و $\frac{س^{۳}+ط^{۳}}{ص^{۳}}$ و $\frac{ط^{۳}+ص^{۳}}{س^{۳}}$ ہوں

(۱۳) ثابت کرو کہ تیسری رقم مساوات

لا^{۳} + ع لا^{۲} + ق لا + ر = ۰

کی ساقط نہیں ہوسکتی اگر ع^{۲} چھوٹا ۳ ق سے ہو

(۱۴) ثابت کرو کہ دوسری اور چوتھی رقم مساوات

لا^{۴} + ع$_{۱}$ لا^{۳} + ع$_{۲}$ لا^{۲} + ع$_{۳}$ لا + ع$_{۴}$ = ۰

کی ایک ہی تبدیل ہیئت سی ساقط ہوسکتی ہیں اگر ۸ ع$_{۳}$ = ع$_{۱}$ (۴ ع$_{۲}$ − ع$_{۱}^{۲}$)

(۱۵) ان مساواتوں کو حل کرو

(۱) لا^{۴} + ۴ لا^{۳} + ۷ لا^{۲} + ۶ لا − ۱۰ = ۰ (۲) لا^{۴} + ۴ لا^{۳} + ۳ لا^{۲} − ۲ لا − ۶ = ۰

(۱۶) ثابت کرو کہ مساوات لا^{۳} + ۴ لا^{۲} + ۶ لا + ۳ = ۰ میں دوسری اور تیسری رقم ایک ہی تبدیل ہیئت سی نہیں ساقط ہوسکتی لیکن اگر لا میں ضرب دیں تو ہوسکتی ہے

(۱۷) ثابت کرو کہ ن درجہ کی مساوات میں سی دوسرے اور تیسرے رقموں کا ساقط کرنا ممکن ہے اگر

ن × (قیمتوں کے مجذوروں کے مجموعہ) = قیمتوں کے مجموعہ کے مربع

باب ۵

(۱) ثابت کرو کہ مساوات لا^{۵} − ۴ لا + ۳ = ۰ کی کم سی کم دو خیالی قیمتیں ہیں

(۲) ثابت کرو کہ مساوات لا^{۶} − ۲ لا^{۴} + لا^{۳} − ۱ = ۰ کی کم سی کم چار خیالی قیمتیں ہیں

(۳) ذیل کی مساواتوں میں کیا نتایج حاصل ہو سکتی ہیں

(۱) لا^{۱۰} − ۵ لا^{۴} + لا^{۲} − لا − ۱ = ۰ (۲) لا^{۳ن} − لا^{۲ن} + لا^{ن} + لا + ۱ = ۰

باب ۶

(۱) ان مساواتوں کو حل کرو ہر ایک مساوات کی برابر قیمتیں ہیں

(۱) لا^{۳} − ۷ لا^{۲} + ۱۶ لا − ۱۲ = ۰ (۲) لا^{۳} − ۳ لا^{۲} − ۹ لا + ۲۷ = ۰

(۳) لا^{۳} − لا^{۲} − ۸ لا + ۱۲ = ۰ (۴) لا^{۳} − ۵ لا^{۲} − ۸ لا + ۴۸ = ۰

(۵) لا^{۳} − لا − $\frac{۲}{۳\sqrt{۳}}$ = ۰ (۶) لا^{۳} − لا + $\frac{۲}{۳\sqrt{۳}}$ = ۰

(۷) لا^{۳} + ۸ لا^{۲} + ۲۰ لا + ۱۶ = ۰ (۸) لا^{۴} − $\frac{۱}{۲}$ لا + $\frac{۳}{۱۶}$ = ۰

(۹) لا^{۴} − ۱۱ لا^{۲} + ۱۸ لا − ۸ = ۰

(۱۰) لا^{۴} − ۲ لا^{۳} − لا^{۲} − ۴ لا + ۱۲ = ۰

(۱۱) لا^{۴} − ۷ لا^{۳} + ۱۳ لا^{۲} + ۳ لا − ۱۸ = ۰

(۱۲) لا^{۴} − ۴ لا^{۳} − ۶ لا^{۲} + ۳۶ لا − ۲۷ = ۰

(۱۳) لا^{۴} + ۱۳ لا^{۳} + ۳۳ لا^{۲} + ۳۱ لا + ۱۰ = ۰

(۱۴) ۴ لا^{۴} − ۱۲ لا^{۳} + ۱۹ لا^{۲} − ۱۶ لا + ۹ = ۰

(۱۵) لا^{۴} + ۱۶ لا^{۳} + ۷۹ لا^{۲} + ۱۲۶ لا + ۹۸ = ۰

(۱۶) ۸ لا^{۴} + ۴ لا^{۳} − ۱۸ لا^{۲} + ۱۱ لا − ۲ = ۰

(۱۷) لا^{۵} − لا^{۴} − ۲ لا^{۳} + ۲ لا^{۲} + لا − ۱ = ۰

(۱۸) لا^{۵} − ۲ لا^{۴} − ۶ لا^{۳} + ۴ لا^{۲} + ۱۳ لا + ۶ = ۰

(۱۹) لا^{۵} − ۱۳ لا^{۴} + ۶۷ لا^{۳} − ۱۷۱ لا^{۲} + ۲۱۶ لا − ۱۰۸ = ۰

(۲۰) $\text{لا}^6 - 3\text{لا}^5 + 6\text{لا}^3 - 3\text{لا}^2 - 3\text{لا} + 2 = 0$

(۲) وہ شرط دریافت کرو جس سی کہ $\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ع}\,\text{لا}^2 + \text{ر} = 0$ کی مساوی قیمتین ہون

(۳) اگر $\text{لا}^4 + \text{ع}\,\text{لا}^3 + \text{ق}\,\text{لا}^2 + \text{ر}\,\text{لا} + \text{ص} = 0$ کی تین برابر قیمتین ہین تو ثابت کرو کہ

$$\text{ق}^2 - 3\text{ع}\,\text{ر} + 12\text{ص} = 0$$

(۴) گر $\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_1\text{لا}^{\text{ن}-1} + \dots + \text{ع}_{\text{ن}} = 0$ کی دو مساوی قیمتین برابر ط کے ہو تو ثابت کرو کہ $\text{ع}_1\text{لا}^{\text{ن}-1} + 2\text{ع}_2\text{لا}^{\text{ن}-2} + \dots + \text{ن}\,\text{ع}_{\text{ن}} = 0$ کی ایک قیمت ط ہے

(۵) اگر $\text{لا}^5 + \text{ق}\,\text{لا}^3 + \text{ر}\,\text{لا}^2 + \text{ت} = 0$ کی دو مساوی قیمتین ہین تو ثابت کرو کہ ایک اونمین سی قیمت مساوات درجہ دوم

$$\text{لا}^2 - \frac{2\text{ق}^2}{5\text{ر}}\text{لا} + \frac{5\text{ت}}{3\text{ر}} - \frac{4\text{ق}}{15} = 0$$ ہوگی

باب ۷

(۱) $\text{لا}^6 - 5\text{لا}^5 + \text{لا}^4 + 12\text{لا}^3 - 21\text{لا}^2 + 1 = 0$ کی منفی اور مثبت قیمتون کی حدود غائی دریافت کرو

(۲) $\text{لا}^4 - 8\text{لا}^3 + 12\text{لا}^2 + 16\text{لا} - 39 = 0$ کو اسطرح لکھو کہ جس سی ثابت ہو کہ ۱۶ اعلیٰ حد غائی مثبت قیمتون کی ہے

(۳) ثابت کرو کہ معادلات ذیل مین حقیقی قیمتین حدود غائی جو معین کی گئی ہین اونکے درمیان واقع ہین

(۱) $\text{لا}^4 - \text{لا}^3 + 4\text{لا}^2 - 3\text{لا} + 1 = 0$ حدود معینہ $\frac{1}{4}$ اور ۱

(۲) $\text{لا}^4 + \text{لا}^3 - 10\text{لا}^2 - \text{لا} + 15 = 0$ حدود معینہ −۴ اور ۳

(۳) $\text{لا}^5 + 5\text{لا}^4 + \text{لا}^3 - 16\text{لا}^2 - 20\text{لا} - 16 = 0$ حدود معینہ −۵ اور ۴

(۴) $(\text{لا}^3 - 26)(\text{لا}^2 + 5\text{لا} + 1) + 60\text{لا} = 0$ حدود معینہ −۵ اور ۳

(۵) $(\text{لا}^2 - 4\text{لا} - 2)^2 - 43 = 0$ حدود معینہ −۲ اور ۶

(۶) $\text{لا}^5 + \text{لا}^4 + \text{لا}^2 - 25\text{لا} - 36 = 0$ حدود معینہ −۵ اور ۵

(۴) معادلات ذیل مین نیوٹن کی ترکیب سی قیمتون کی حدود غائی دریافت کرو

(۱) $\text{لا}^4 - \text{لا}^3 - 5\text{لا}^2 + 8\text{لا} - 9 = 0$ (۲) $\text{لا}^4 - 5\text{لا}^2 + 6\text{لا} - 1 = 0$

(۳) لا^{۴} − لا^{۳} + ۴لا^{۲} + لا − ۴ = ۰ (۴) لا^{۴} − ۵لا^{۳} + ۱۱لا^{۲} − ۲۰ = ۰

(۵) لا^{۴} − ۲لا^{۳} − ۳لا^{۲} − ۱۵لا − ۳ = ۰

(۵) ثابت کرو کہ لا^{۵} + ۵لا^{۴} − ۲۰لا^{۲} − ۱۹لا − ۲ = ۰ کی ایک قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان ہے اور کوئی قیمت بڑی ۳ سے نہیں ہی اور ایک قیمت −۵ اور −۴ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور کوئی چھوٹی −۵ سے نہیں ہے

(۶) دفعہ ۱۰۲ کی ترکیب کو معادلات ذیل کی حقیقی قیمتوں کا مقام اور تعداد دریافت کرو

(۱) لا^{۳} − ۱۲لا + ۱۷ = ۰ (۲) لا^{۴} − ۳۲لا + ۳۰ = ۰

(۳) لا^{۳} − ۳لا + ۳ = ۰ (۴) ۴لا^{۳} + ۹لا^{۲} − ۱۲لا + ۲ = ۰

(۵) لا^{ن} − ط لا^{م} + ش = ۰ (۶) لا^{۲ن} − ع لا^{ن} + ر = ۰

(۷) ثابت کرو کہ مساوات ۳لا^{۴} + ۸لا^{۳} − ۶لا^{۲} − ۲۴لا + ر = ۰ کی چار حقیقی قیمتیں ہیں اگر ر چھوٹا −۸ سے اور بڑا −۱۳ سے ہو اور دو حقیقی قیمتیں ہیں اگر ر بڑا −۸ سے اور چھوٹا ۱۹ سے ہو اور کوئی حقیقی قیمت نہیں ہوگی اگر ر بڑا ۱۹ سے ہو

باب ۸

(۱) معادلات ذیل کی قیمتیں ناطقہ محدودہ دریافت کرو

(۱) لا^{۳} − ۱۰۶لا − ۴۲۰ = ۰ (۲) لا^{۳} − ۹لا^{۲} + ۲۲لا − ۲۴ = ۰

(۳) لا^{۳} − ۲لا^{۲} − ۲۵لا + ۵۰ = ۰ (۴) ۲لا^{۳} − ۳لا^{۲} + ۲لا − ۳ = ۰

(۵) ۲لا^{۳} − ۲لا^{۲} − ۶لا + ۴ = ۰ (۶) ۳لا^{۳} − ۲۶لا^{۲} + ۳۴لا − ۱۲ = ۰

(۷) لا^{۴} − ۲لا^{۳} + ۸لا − ۱۶ = ۰ (۸) لا^{۴} − لا^{۳} − ۱۳لا^{۲} + ۱۶لا − ۴۸ = ۰

(۹) لا^{۴} − لا^{۳} − لا^{۲} + ۱۹لا − ۴۲ = ۰ (۱۰) لا^{۴} + ۸لا^{۳} − ۷لا^{۲} − ۴۹لا + ۵۶ = ۰

(۱۱) لا^{۵} − ۳لا^{۴} − ۹لا^{۳} + ۲۱لا^{۲} − ۱۰لا + ۲۴ = ۰

(۱۲) لا^{۶} − ۷لا^{۵} + ۱۱لا^{۴} − ۷لا^{۳} + ۱۴لا^{۲} − ۲۸لا + ۴۰ = ۰

(۲) امتحان مساوات ح(لا) = ۰ مین صحاح ہین تو ثابت کرو کہ اگر ح(۰) اور ح(۱) دونو طاق اعداد ہون تو مساوات کی قیمت اعداد صحیح نہین ہو سکتین

باب ۹

(۱) معادلات ذیل کو حل کرو ہر ایک دو قیمتین ۱ اور −۱ کی صورت کی ہین

(۱) $لا^۴ - ۲لا^۳ - ۲لا^۲ + ۸لا - ۸ = ۰$ (۲) $لا^۴ + ۳لا^۳ - ۷لا^۲ - ۲۷لا - ۱۸ = ۰$

(۳) $لا^۴ + ۳لا^۳ + ۲لا^۲ + ۹لا - ۳ = ۰$ (۴) $لا^۴ + لا^۳ - ۱۱لا^۲ + ۹لا + ۱۸ = ۰$

(۲) معادلات ذیل کو حل کرو ہر ایک کی قیمتین سلسلہ حسابیہ مین ہین

(۱) $لا^۳ - ۶لا^۲ + ۱۱لا - ۶ = ۰$ (۲) $لا^۳ - ۹لا^۲ + ۲۳لا - ۱۵ = ۰$

(۳) $لا^۴ - ۸لا^۳ + ۱۴لا^۲ + ۸لا - ۱۵ = ۰$ (۴) $لا^۴ + لا^۳ - ۱۱لا^۲ + ۹لا + ۱۸ = ۰$

(۳) ان مساواتون کو حل کرو بعض شرائط جو قیمتون سے متعلق ہین وہ اونکے ساتھ بیان کی گئی ہین

(۱) $۳لا^۳ - ۲لا^۲ - ۲۷لا + ۱۸ = ۰$ حاصل ضرب دو قیمتون کا ۲ ہے

(۲) $لا^۴ - ۳لا^۲ - ۶لا - ۲ = ۰$ حاصل ضرب دو قیمتون کا −۱ ہے

(۳) $لا^۴ - ۴لا^۳ + ۵لا^۲ - ۱۱۴لا + ۴ = ۰$ حاصل ضرب دو قیمتون کا ۱ ہے

(۴) $۲لا^۴ - ۵لا^۳ + ۱۱لا^۲ - ۱۱لا + ۶ = ۰$ حاصل ضرب دو قیمتون کا ۱ ہے

(۵) $لا^۴ - ۴۵لا^۲ - ۱۷۰لا + ۸۴ = ۰$ حاصل تفریق دو قیمتون کا ۳ ہے

(۶) $لا^۵ - ۷لا^۴ + ۱۵لا^۳ - ۱۵لا^۲ + ۱۴لا - ۸ = ۰$ ایک قیمت دوسری سے دو چند ہے

(۴) معادلات ذیل کو حل کرو اونکی قیمتون کی صورتین معین ہین

(۱) $لا^۳ - ۱۰لا^۲ + ۲۷لا - ۱۹ = ۰$ صورتین ا و ۳ا و ۶ا

(۲) $لا^۴ - ۱۰لا^۳ + ۳۵لا^۲ - ۵۰لا + ۲۴ = ۰$ صورتین ا + ۱ و ا − ۱ و ب + ۱ و ب − ۱

(۳) $۶لا^۴ - ۴۳لا^۳ + ۱۰۷لا^۲ - ۱۰۸لا + ۳۶ = ۰$ اور صورتین ا و ب و $\frac{۱}{ا}$ و $\frac{۱}{ب}$

(۴) $لا^۵ + ۸لا^۴ + ۵لا^۳ - ۵۰لا^۲ - ۳۶لا + ۷۲ = ۰$ صورتین ا و ۲ا و ب و ۲ب و ا + ب

(۵) $لا^۶ - ۴لا^۵ + ۱۰لا^۴ - ۱۶لا^۳ + ۴۴لا^۲ - ۱۶لا + ۵۶ = ۰$ صورتین ا ± $\sqrt{ب}$ و ± $\sqrt{ج}$

(۶) $لا^۶ - ۱۲لا^۵ - ۲لا^۴ + ۳۷لا^۳ + ۱۰لا^۲ - ۱۰لا - ۱۰ = ۰$ ؛ ۱ ± $\sqrt{ا}$ و ب ± $\sqrt{ب}$ و ± $\sqrt{ج}$

(۵) معادلات ذیل کو حل کرو ہر ایک زوج مین ایک قیمت مشترک ہے

(۱) $لا^{۳} - ۳لا^{۲} - ۱۶لا - ۱۲ = ۰$ و $لا^{۳} - ۷لا^{۲} + ۵لا + ۱۳ = ۰$

(۲) $لا^{۳} - ۳لا^{۲} + ۱۱لا - ۹ = ۰$ و $لا^{۳} - ۵لا^{۲} + ۱۱لا - ۷ = ۰$

(۶) مساوات $لا^{۳} - ۷لا^{۲} + ۳۶ = ۰$ اور $لا^{۳} - ۳لا^{۲} - ۱۰لا + ۲۴ = ۰$ کو حل کرو
پہلی مساوات کی ایک قیمت سہ چند دوسری مساوات کی ایک قیمت سے ہے

(۷) معادلات ذیل کو حل کرو جنمین دو قیمتین مشترک ہین

$لا^{۴} - ۲لا^{۳} - ۷لا^{۲} + ۲۶لا - ۲۰ = ۰$ و $لا^{۴} + ۴لا^{۳} - ۲لا^{۲} - ۱۲لا + ۸ = ۰$

(۸) م اور ا کی رقمون مین اس مساوات

$$لا^{۴} + ع\,ا\,لا^{۳} + (م^{۲} + م)\,ا^{۲}لا^{۲} + ق\,ا^{۳}لا + ا^{۴} = ۰$$

کی قیمتین جو سلسلہ حسابیہ مین ہین دریافت کرو اور ع اور ق کو م اور ا کی رقمون مین تحقیق کرو

باب ۱۰

(۱) ان معادلات مکافیہ کو حل کرو

(۱) $لا^{۴} - ۲لا^{۳} + ۳لا^{۲} - ۲لا + ۱ = ۰$ (۲) $لا^{۴} + ۴لا^{۳} - ۵لا^{۲} + ۴لا + ۱ = ۰$

(۳) $۲لا^{۴} - ۵لا^{۳} + ۶لا^{۲} - ۵لا + ۲ = ۰$ (۴) $لا^{۴} + ۴لا^{۳} - ۱۰لا^{۲} + ۴لا + ۱ = ۰$

(۵) $لا^{۵} - ۲لا^{۴} - ۱۹لا^{۳} - ۱۹لا^{۲} - ۲لا + ۱ = ۰$ (۶) $لا^{۵} - ۴لا^{۴} + لا^{۳} + لا^{۲} - ۴لا + ۱ = ۰$

(۷) $۶لا^{۵} - ۱۱لا^{۴} - ۳۳لا^{۳} + ۳۳لا^{۲} + ۱۱لا - ۶ = ۰$

(۸) $۲لا^{۶} - ۵لا^{۵} + ۴لا^{۴} - ۴لا^{۲} + ۵لا - ۲ = ۰$

(۹) $۸لا^{۶} - ۱۶لا^{۴} - ۲۵لا^{۳} - ۱۶لا^{۲} + ۸ = ۰$ (۱۰) $۱ + لا^{۵} = ا(۱ + لا)^{۵}$

(۲) معادلات ذیل کی قیمتین دریافت کرو اور انکا تنزل کرو

(۱) $لا^{۷} - ۲لا^{۵} + لا^{۴} + لا^{۳} - ۲لا^{۲} + ۱ = ۰$

(۲) $لا^{۷} + ۲لا^{۶} - ۸لا^{۵} - ۷لا^{۴} - ۷لا^{۳} - ۸لا^{۲} + ۲لا + ۱ = ۰$

(۳) $لا^{۸} + ۲لا^{۷} + ۳لا^{۶} + ۲لا^{۵} - ۲لا^{۳} - ۳لا^{۲} - ۲لا - ۱ = ۰$ (۴) $لا^{۱۰} - ۱ = ۰$

(۳) لا^۳ + ع لا^۲ + ۱ = ۰ کی قیمتوں کو

ا و ب و $\frac{1}{ا}$ و $\frac{1}{ب}$ کی صورت میں نمایاں کرو

(۴) اگر ا و ب و س قیمتیں مساوات مکررہ کی تعبیر کریں تو

لا^ن + ع لا^(ن-۱) + ق لا^(ن-۲) + ۰۰ + ق لا^۲ + ع لا + ۱ = ۰

ب^۲/ا^۲ + س^۲/ب^۲ + ۰۰۰ + ا^۲/ب^۲ + س^۲/ا^۲ + ۰۰۰ + س^۲/ا^۲ + ۰۰ = (ع^۲ - ۲ ق)^۲ - ن

(۵) مساوات مکررہ لا^۲ن - ع لا^(۲ن-۱) + ۰۰ = ۰ میں اگر قیمتیں علی التبادل مثبت اور منفی ہوں اور ع بڑا ۲ن سی نہ ہو تو قیمتیں تمام حقیقی نہیں ہونگیں

باب ۱۱

(۱) معادلات ذیل کو حل کرو

(۱) لا^۷ - ۱ = ۰ (۲) لا^۹ - ۱ = ۰ (۳) لا^۸ + ۱ = ۰

(۲) ثابت کرو کہ اجزاء ضربی ا^۳ + ب^۳ + س^۳ - ۳ ا ب س کی صورتیں ا + ب ئے + س ئے^۲ ہیں جبکہ ئے^۳ - ۱ = ۰

(۳) ثابت کرو کہ اجزاء ضربی

ا^۲ (ا^۲ - ۴ ب د - س^۲) - ب^۲ (ب^۲ - ۴ ا س - د^۲) + س^۲ (س^۲ - ۴ ب د - ا^۲) - د^۲ (د^۲ - ۴ ا س - ب^۲)

کے اس صورت ا + ب ک + س ک^۲ + د ک^۳ کے ہیں جبکہ ک^۴ - ۱ = ۰

باب ۱۲

(۱) ان مساواتوں کو حل کرو

(۱) لا^۳ - ۳ لا - ۲ = ۰ (۲) لا^۳ - ۹ لا - ۲۸ = ۰

(۳) لا^۳ - لا + ۶ = ۰ (۴) لا^۳ + ۳ لا = $\frac{۳}{۲}$

(۵) ۳ لا^۳ - ۶ لا^۲ - ۲ = ۰ (۶) لا^۳ - ۱۵ لا^۲ - ۳۳ لا + ۸۴۷ = ۰

(۷) لا^۳ + ۲ ا لا^۲ = ۶ س ا^۳ (۸) لا^۳ - ۳ (ا^۲ + ب^۲) لا = ۲ ا (ا^۲ - ۳ ب^۲)

(۲) مساوات $لا^{۳} + ق لا + ر = ۰$ کی یہہ صورت $لا^{۴} = (لا^{۲} + ا لا + ب)^{۲}$ بن جاۓ اسکی
واسطے ق اور ر مین کیا ارتباط ہونا ضرور ہے
اور پھر اوس ارتباط سے مساوات $۸ لا^{۳} - ۳۶ لا + ۲۷ = ۰$ حل کرو

(۳) اگر مساوات $لا^{۳} + ع لا^{۲} + ق لا + ر = ۰$ کی قیمتین سلسلہ ہندسہ مین ہون تو $ر ع^{۳} = ق^{۳}$
اسی مساوات $لا^{۳} - لا^{۲} + ۲ لا - ۸ = ۰$ کو حل کرو

(۴) اگر مساوات $لا^{۳} + ق لا + ر = ۰$ کی قیمتین بقدر ھ کے کم کیجاہین تو ثابت کرو
ہت بدلی ہوئی مساوات جو حاصل ہوگی اوسکی قیمتین سلسلہ ہندسہ مین ہونگین بشرطیکہ ھ ایسا ہو کہ
$۲۷ ر ھ^{۳} - ۹ ق ھ^{۲} - ق^{۳} = ۰$

(۵) اگر مساوات $لا^{۳} + ۳ ع لا^{۲} + ۳ ق لا + ر = ۰$ کی قیمتین سلسلہ موسیقہ مین ہو تو
$۲ ق^{۳} = ر (۳ ع ق - ر)$

(۶) اگر مساوات $لا^{۳} + ۳ ع لا^{۲} + ۳ ق لا + ر = ۰$ کی قیمتین سلسلہ موسیقہ مین ہون تو
مساوات $ر لا^{۲} + ۲ ق^{۲} لا + ق ر = ۰$ مین سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی قیمتین شامل ہونگین

(۷) $لا^{۳} + ق لا + ر = ۰$ کی ناممکن قیمتین صورت $س \pm ص \sqrt{-۱}$ کی ہین
تو ثابت کرو کہ $ص^{۲} = ۳ س^{۲} + ق$

(۸) اگر ر و $س + ص\sqrt{-۱}$ و $س - ص\sqrt{-۱}$ مین قیمتین مساوات $لا^{۳} + ع_{۱} لا^{۲} + ع_{۲} لا + ع_{۳} = ۰$
کی ہون اونمین سے ر حقیقی قیمت ہی اور مساوات $لا^{۳} + م_{۱} لا^{۲} + م_{۲} لا = ۰$ اسطرح پیدا ہوتی ہو
کہ اوپر کی مساوات کی قیمتین بقدر ر کے کم کردین تو ثابت کرو کہ
$س = -\frac{م_{۱}}{۲} + ر$ اور $ص = -\frac{۱}{۴}(م_{۲} + ۳ ع_{۲} - ع_{۱}^{۲})$

(۹) مساوات $لا^{۳} + ع لا^{۲} + ق لا + ر = ۰$ کو صورت
$ی^{۳} - ۳ ی + م = ۰$ کی طرف $لا = ا ی + ب$ فرض کرکی تحویل کرو اور اس مساوات کو
$ی = ی + \frac{۱}{ی}$ فرض کرکے حل کرو اور اسی ثابت کرو کہ اگر اصلی مساوات کی برابر قیمتین ہون تو

۴(ع^۲ − ۳ق)^۳ = (۲ع^۳ − ۹ع ق + ۲۷ر)^۲

(۱۰) اگر مساوات لا^۳ + ع لا^۲ + ق لا + ر = ۰ کی قیمتین سلسلہ موسیقہ مین ہین تو اس مساوات کی قیمتین بھی سلسلہ موسیقہ مین ہونگین

(ع ق − ر) ی^۳ − (ع^۲ − ۲ع ق + ۳ر) ی^۲ + (ع ق − ۳ر) ی − ر = ۰

باب ۱۳

(۱) معادلات ذیل کو حل کرو

(۱) لا^۴ + ۴لا^۳ + ۳لا^۲ − ۴۴لا − ۸۴ = ۰ (۲) لا^۴ − ۶لا^۲ − ۸لا − ۳ = ۰

(۳) لا^۴ − ۱۲لا^۳ + ۴۹لا^۲ − ۷۸لا + ۴۰ = ۰

(۴) لا^۴ − ۲ا لا^۳ + (ا^۲ − ۲ب^۲) لا^۲ + ۲ا ب^۲ لا − ا^۲ ب^۲ = ۰ دفعہ ۱۹۲

(۲) اگر ر^۲ − ع^۲ ص = ۰ تو مساوات لا^۴ + ع لا^۳ + ق لا^۲ + ر لا + ع = ۰ مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہو جائیگی

(۳) اگر ص اور ع مثبت ہون اور ۲۷ع^۴ چھوٹی ۲۵۶ص سی ہو تو مساوات لا^۴ + ع لا^۳ + ص = ۰ کی قیمتین سب خیالی ہونگین

(۴) مساوات لا^۴ + ق لا^۲ + ر لا + ص = ۰ کی قیمتین صورت سہ ± صہ √−۱ فرض کرکے ثابت کرو کہ سہ اور صہ کی قیمتین ان مساواتون سی دریافت ہو سکتی ہین کہ

۶۴ سہ^۶ + ۳۲ق سہ^۴ + (۴ق^۲ − ۱۶ص) سہ^۲ − ر^۲ = ۰ و صہ^۲ = سہ^۲ + ق/۲ + ر/۴سہ

باب ۱۴

(۱) معادلات ذیل مین قیمتین بعض سٹرم کے جملون کی متعین ہو چکی ہین اونکی حقیقی قیمتون کا مقام حسب ضابطہ سٹرم صاحب کی دریافت کرو

(۱) لا^۴ − ۴لا^۳ − ۳لا + ۲۳ = ۰ و ح_۳ (لا) = −۱۹۴لا + ۱۳۷۱ و ح_۴ (لا) = −

(۲) لا^۴ − ۴لا^۳ + لا^۲ + ۶لا + ۲ = ۰ و ح_۲ (لا) = ۵لا^۲ − ۱۰لا − ۷ و ح_۳ (لا) = لا − ۳

ح۴ (۴) = +

(۳) لا۴ + لا۳ + لا − ۱ = ۰ وح۲ (لا) = ۳ لا۲ − ۱۲ لا + ۱۷ دفعہ ۱۹۹

(۴) لا۵ − ۲ لا۴ + لا۳ − ۸ لا + ۶ = ۰ وح۳ (لا) = ۱۴ لا۲ − ۲۳ لا + ۹

(۵) لا۵ + ۵ لا۴ − ۲۰ لا۲ − ۱۹ لا − ۲ = ۰ وح۲ (لا) = ۲۰ لا۳ + ۶۰ لا۲ + ۳۶ لا − ۹

ح۳ (لا) = ۹۹ لا۲ + ۱۸۷ لا + ۶۷ وح۴ (لا) = ۴۳۶۵۱ لا + ۵۷۵۷۱

ح۵ (لا) = +

(۲) سٹرم کی ضابطہ سے ثابت کرو کہ معادلات ذیل میں ایک حقیقی قیمت ہے اور اوسکا مقام دریافت کرو

(۱) لا۳ + ۶ لا۲ + ۱۰ لا − ۱ = ۰ (۲) لا۳ − ۶ لا۲ + ۸ لا + ۴۰ = ۰

(۳) مساوات لا۶ − ۲ لا۳ + ۳ لا۲ − ۵ لا − ۱ = ۰ مثبت قیمتوں کا مقام معلوم ہے اور معلوم ہی کہ ح۲ (لا) = ۴ لا (لا − ۱)۲ + ۱۹ لا + ۶

(۴) معادلات ذیل میں سٹرم کے ضابطہ کو کام میں لاؤ

(۱) لا۳ + لا۲ − ۳ لا − ۱ = ۰ (۲) لا۳ − ۴ لا۲ − ۴ لا + ۲۰ = ۰

(۳) لا۴ + ۲ لا۲ − ۴ لا + ۱۰ = ۰ (۴) لا۶ − لا + ۱ = ۰

باب ۱۵

(۱) ثابت کرو کہ مساوات

لا۵ − ۳ لا۴ − ۲۴ لا۳ + ۹۵ لا۲ − ۴۶ لا − ۱۰۱ = ۰

کی تمام حقیقی قیمتیں درمیان −۱۰ اور ۱۰ اکے ہیں اور ایک حقیقی قیمت اوسکی −۱۰ اور −۱ اکے درمیان اور ایک قیمت −۱ اور ۰ کے درمیان اور کوئی قیمت ۰ اور ا کے درمیان نہیں ہے اور بر کم سے کم ایک قیمت ۱ اور ۱۰ اکے درمیان ہے

(۲) اس مساوات میں ضابطہ فوریر کو کام میں لاؤ کہ

لا^{۴} + ۳لا^{۳} + ۷لا^{۲} + ۱۰لا + ۱ =

باب ۱۶

(۱) لاگرانژ کی ترکیب کے موافق مثبت تقریبی قیمت مساوات ۳لا^{۲} − ۴لا − ۱ = ۰ کی دریافت کرو

(۲) لاگرانژ کی ترکیب کے موافق مساوات لا^{۴} + لا^{۳} − ۲لا^{۲} − ۳لا − ۳ = ۰ تقریبی قیمتیں ۱ اور ۲ کے درمیان دریافت کرو

باب ۱۷

(۱) حدود غائی جو معین کی گئی ہیں اونکی درمیان جو قیمتیں معادلات ذیل کی واقع ہوں اونکو نیوٹن صاحب کی ترکیب سے نکالو

(۱) لا^{۳} − ۴لا − ۱۲ = ۰ قیمت ۲ اور ۳ کی درمیان

(۲) لا^{۳} − ۴لا^{۲} − ۷لا + ۲۴ = ۰ قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان

(۳) لا^{۳} − ۴۲لا + ۴۴ = ۰ قیمت ۲٫۳ و ۳٫۳ کے درمیان

(۴) لا^{۳} − ۱۵لا − ۵ = ۰ قیمت ۴ اور ۴٫۱ کے درمیان

(۵) لا^{۴} − ۸لا^{۳} + ۱۲لا^{۲} + ۸لا − ۴ = ۰ قیمت ۰ اور ۱ کے درمیان

(۲) معادلات ذیل کی ایک قیمت کی دریافت کرنی میں نیوٹن صاحب کی ترکیب کام میں لاؤ

(۱) لا^{۳} + ۳لا − ۵ = ۰ (۲) لا^{۳} − ۳لا^{۲} − ۳لا + ۲۰ = ۰

باب ۱۸

( ) معادلات ذیل میں جو حدود غائی متعین کی گئی ہیں اونکی درمیان معادلات کی قیمت ہورنر کی ترکیب سے دریافت کرو

(۱) لا^{۳} + ۱۰لا^{۲} + ۶لا − ۱۲۰ = ۰ قیمت درمیان ۲ و ۳

(۲) لا^{۴} − ۲لا^{۳} + ۲۱لا − ۲۳ = ۰ قیمت درمیان ۱ و ۲ کے

(۳) لا^{۴} − ۵لا^{۳} + ۳لا^{۲} + ۳۵لا − ۷۰ = ۰ قیمت درمیان ۲ اور ۳ کے

(۲) حل کرو مساوات لا^{3} − ۱۷ = ۰ کو موافق ہورنر کی ترکیب کی

(۳) قیمتوں کا حساب ہورنر کی ترکیب کے موافق معادلات ذیل کا کرو

(۱) لا^{3} + لا − ۳ = ۰ (۲) لا^{3} + ۲ لا − ۲۰ = ۰

(۳) ۳ لا^{3} + ۵ لا − ۴۰ = ۰ (۴) لا^{3} + ۱۰ لا^{2} + ۸ لا − ۱۲۰ = ۰

باب ۱۹

(۱) مساوات لا^{3} + ع لا^{2} + ق لا + ر = ۰ کی قیمتوں ا و ب و س کی بالقرینہ جملوں کی قیمت دریافت کرو

(۱) (ا + ب + ا ب) (ب + س + ب س) (س + ا + س ا)

(۲) (ا + ب − ۲ س) (ب + س − ۲ ا) (ا + س − ۲ ب)

(۳) ح (ا + ب)^{2} (ا + س) (۴) ح (ا + ب − ۲ س) (ب + س − ۲ ا)

(۵) ح $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا + ب}}$ (۶) ح $\frac{\text{ا}^{2}}{\text{ب س}}$ (۱ + $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$) (۱ + $\frac{\text{س}}{\text{ا}}$)^{2}

(۷) (ب − س)^{2} (س − ا)^{2} (ا − ب)^{2}

(۲) اگر ا و ب و س قیمتیں مساوات

لا^{4} + ع لا^{3} + ن لا^{2} + ر لا + ص = ۰

کی ہوں تو قیمت ح (ا + ب) (س + د) کی دریافت کرو

(۳) مساوات لا^{ن} + ع$_{1}$ لا$^{ن-1}$ + ۰ ۰ + ع$_{ن-1}$ لا + ع$_{ن}$ = ۰ کی قیمتیں ا و ب و س ۰ ۰ ل فرض کر کے دریافت کرو

(۱) ح ا^{2} ب (۲) ح (ا + ب) (ا + س) ۰ ۰ (ا + ل)

(۳) ح $\frac{(\text{ا + ب})^{2}}{\text{ا ب}}$ (۴) ح $\frac{\text{ا}^{2}}{\text{ب}}$

(۵) ایسی مساوات بناؤ جسکی قیمتیں مساوات لا^{4} + ع لا^{3} + ر لا + ص = ۰ کی ہر تین قیمتوں کی مجموعوں کی مجذور کے برابر ہو اور نیز ایسی مساوات بھی بناؤ کہ جسکی قیمتیں برابر

ہر ہین قیمتوں کی مجذوروں کے مجموعہ کے ہو

(۵) اگر $\text{ص}_{۱}$ اور $\text{ص}_{۲}$ و $\text{ص}_{۳}$ ... مجموعہ اول اور دوم اور سوم ... مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتوں کا ہو اور مساوات ن درجہ کی ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا ح}'(\text{لا})}{\text{ح لا}} = \text{ن} + \frac{\text{ص}_{۱}}{\text{لا}} + \frac{\text{ص}_{۲}}{\text{لا}^{۲}} + \frac{\text{ص}_{۳}}{\text{لا}^{۳}} + \dots$$

(۶) اگر مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ع}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \text{ع}_{۳}\,\text{لا}^{\text{ن}-۳} + \dots + \text{ع}_{\text{ن}} = ۰$ ایک اور صورت مین تبدیل ہو جسکی قیمتین اصلی مساوات کی قیمتوں کی ہر زوج کی برابر ہوں تو اول مین امثال بدلی ہوئی مساوات کی دریافت کرو

باب ۲۰

(۱) معادلات ذیل کو اون مساواتوں کی صورت مین تبدیل کرو جنکی قیمتین اصلی معادلات کی قیمتوں کی فرقوں کی مجذور ہوں

(۱) $\text{لا}^{۳} - ۷\,\text{لا} + ۷ = ۰$ (۲) $\text{لا}^{۴} + ۴\,\text{لا} + ۳ = ۰$ (۳) $\text{لا}^{۴} + ۱ = ۰$

(۲) لا کو ان مساواتوں $\text{ا لا}^{۲} + \text{ب لا} + \text{س} = ۰$ اور $\text{ا}'\text{لا}^{۲} + \text{ب}'\text{لا} + \text{س}' = ۰$ سے ساقط کرو

باب ۲۱

(۱) معادلات ذیل کی قیمتوں کی جو قوت متعین کی گئی ہی وہ دریافت کرو

(۱) $\text{لا}^{۴} - \text{لا}^{۳} - ۱۹\,\text{لا}^{۲} + ۴۹\,\text{لا} - ۳۰ = ۰$ مین مکعب

(۲) $\text{لا}^{۵} - ۳\,\text{لا}^{۳} - ۵\,\text{لا} + ۱ = ۰$ مین چوتھی قوت

(۳) $\text{لا}^{۵} - ۲\,\text{لا}^{۴} - ۲۲\,\text{لا}^{۳} - ۲۸\,\text{لا}^{۲} + ۷۲\,\text{لا} + ۱۴۴ = ۰$ مین مکعب

(۴) $\text{لا}^{۴} + ۴ + ۱ = ۰$ مین معکوس مربعات

(۵) $\text{لا}^{۳} - \text{لا} - ۱ = ۰$ مین چھٹی قوت

(۳) اگر مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} + \text{لا} + ۱ = ۰$ کی قیمتوں کی ر وین قوتوں کا مجموعہ $\text{ص}_{\text{ر}}$ سے تعبیر کیا جاے اور ر اور ا ونکی متکافی قیمتوں کی ر وین قوت کا مجموعہ $\text{ح}_{\text{ر}}$ سے

تو ثابت کرو کہ

$$ص_{ن-۱} - ص_{ن} = ۱ \text{ اور } ح_{ن-۱} - ح_{ن} = ن - ۲ (-۱)^{ن}$$

(۴) مساوات $لا^{ن} - لا^{۲} + ۱ = ۰$ مین ن کو ۳ سی بڑا فرض کرکے $ح\, ا^{ن-۳}$ و $ح\, ا^{ن-۲}$ اور $ح\, ا^{ن}$ کو دریافت کرو

(۵) مساوات $لا^{۲} - ع\, لا + ق = ۰$ مین ن کو بڑا رسی فرض کرکے قیمتون کی روین قوتون اور (۲ن) وین قوتون کا مجموعہ دریافت کرو

باب ۲۲

(۱) ان مساواتون کو حل کرو

$$\left\{\begin{aligned} (ی-۱)\, لا^{۲} + ی\, لا + ی^{۲} - ۲ی = ۰ \\ (ی-۱)\, لا + ی = ۰ \end{aligned}\right.$$

(۲) ان مساواتون کو حل کرو

$$(ی-۱)\, لا^{۳} + ی(ی+۱)\, لا^{۲} + (۳ی^{۲} + ی - ۲)\, لا + ۲ی = ۰$$

$$(ی-۱)\, لا^{۲} + ی(ی+۱)\, لا + ۳ی^{۲} - ۱ = ۰$$

(۳) ثابت کرو کہ ذیل کی مساواتون کا کوئی حل نہین ہے

$$\left\{\begin{aligned} ی\, لا^{۲} - (ی^{۳} - ۳ی - ۱)\, لا + ی = ۰ \\ لا^{۲} - ی^{۲} + ۳ = ۰ \end{aligned}\right.$$

باب ۲۳

(۱) مساوات $ی^{۴} لا - ی^{۳} لا^{۲} + ۳ی\, لا^{۳} - ی^{۲} لا + ۴ی - ۲لا = ۰$ مین ی کی ہر یک قیمت لا کی قوات متنازلہ مین جب پہیلائی جائی تو اوسکی اول رقم ہر یک قیمت مین دریافت کرو

(۲) مساوات $لا^{۱۲} + لا^{۱۴} + لا^{۱۱} ی - لا^{۸} ی^{۲} + ۲لا^{۷} ی^{۳} - لا^{۴} ی^{۴} + ی^{۶} - ۳لا\, ی^{۹} + لا^{۱۴} ی^{۱۳} = ۰$ مین ی کی ہر یک قیمت لا کی قوات متصاعدہ مین جب پہیلائی جائی تو اوسکی اول رقم ہر یک قیمت مین دریافت کرو

امثلہ متفرقہ

(۱) اگر ق مقادیر ا و ب و س ۰۰ ہوں اور ن جملے اس صورت

$$\frac{(\text{لا} - \text{ب})\,(\text{لا} - \text{س}) \cdots}{(\text{ا} - \text{ب})\,(\text{ا} - \text{س}) \cdots}$$ کے

لئی جائیں تو ثابت کرو کہ ان جملوں کا مجموعہ واحد ہے

(۲) مساوات لا^{۵} + ۵ لا^{۴} + ۲۰۰ لا^{۳} − ۱۱۱ لا + ۶ = ۰ میں وہ رقم دور کرو جسمیں لا کا مکعب ملتف ہے

(۳) بتلاؤ کہ ایک مساوات کو جسمیں دو تغیرات اور تواترات ہوں کسطرح ایسی مساواتوں میں تبدیل کریں کہ

(۱) جسمیں صرف تواترات علامت ہوں (۲) جسمیں صرف تغیرات ہوں

(۴) اگر ع اور ق مثبت ہوں تو مساوات لا^{۲ل} − ع لا^{ل} + ق = ۰ کی چار حقیقی مختلف قیمتیں ہونگی اگر $\left(\frac{\text{ر ع}}{\text{ل}}\right)^{\text{ل}}$ بڑا بہ نسبت $\left(\frac{\text{ر ل}}{\text{ل} - \text{ر}}\right)^{\text{ل} - \text{ر}}$ کے ہو اور کوئی حقیقی قیمت نہیں ہوگی اگر $\left(\frac{\text{ر ع}}{\text{ل}}\right)^{\text{ل}}$ چھوٹا بہ نسبت $\left(\frac{\text{ر ق}}{\text{ل} - \text{ر}}\right)^{\text{ل} - \text{ر}}$ کے ہو اور اوسکی دو زوج قیمتوں کی برابر ہونگی اگر $\left(\frac{\text{ر ع}}{\text{ل}}\right)^{\text{ل}} = \left(\frac{\text{ر ق}}{\text{ل} - \text{ر}}\right)^{\text{ل} - \text{ر}}$

(۵) اگر − ع$_{\text{ل} - \text{ق}}$ لا$^{\text{ل} - \text{ق}}$ و − ع$_{\text{ل} - \text{ر}}$ لا$^{\text{ل} - \text{ر}}$ و − ع$_{\text{ل} - \text{ص}}$ لا$^{\text{ل} - \text{ص}}$ . . . منفی رقمیں ایک ل درجے کی مساوات کی ہو تو سب سے بڑی قیمت مساوات کی مقادیر (ع$_{\text{ل} - \text{ق}}$)$^{\frac{1}{\text{ق}}}$ و (ع$_{\text{ل} - \text{ر}}$)$^{\frac{1}{\text{ر}}}$ و (ع$_{\text{ل} - \text{ص}}$)$^{\frac{1}{\text{ص}}}$ . . . میں سب سے بڑی دو مقداروں کے مجموعہ کے برابر ہوگی

(۶) اگر ل درجہ کی مساوات کی اخر رقم ک ہو اور اس مساوات کی قیمتیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اگر ل طاق ہو تو ک$^{\frac{1}{\text{ل}}}$ قیمت مساوات کی ہوگی اور ثابت کرو کہ اسیطرح ایک قیمت اوس طاق درجہ کی مساوات کی جسکی قیمتیں سلسلہ حسابیہ میں یا سلسلہ موسیقیہ میں ہوں دریافت ہوسکتی ہے

(۷) وفق اعظم

لا^{۵} − ۶ لا^{۴} + ۷ لا^{۳} + ۷ لا^{۲} − ۶ لا − ۳ = ۰

اور لا^{۴} - لا^{۲} - ۳لا - ۱ = ۰ کا دریافت کرو اور مساوات

لا^{۵} - ۶لا^{۴} + ۷لا^{۳} + ۷لا^{۲} - ۶لا - ۳ = ۰

کو حل کرو

(۸) مساوات لا^{۴} + ق لا^{۲} + رلا + ص = ۰ کی قیمتیں بقدر ھ کے کم کرو
اور ھ کی ایسی قدر مقرر کرو کہ بدلی ہوئی مساوات کی قیمتیں صورت
ا و $\frac{۱}{ا}$ و ب و $\frac{۱}{ب}$ کی ہوں اور بتلاؤ کہ یہہ مساوات کسطرح حل ہو سکتی ہے
مثال لا^{۴} - ۲لا^{۲} + ۱۶لا + ۱ = ۰

(۹) جبریہ جملوں کے جذر نکالنے کا جو عمل ہی اوسسے ثابت کرو کہ مساوات لا^{۴} + ع لا^{۳} + ق لا^{۲} + رلا + ص = ۰
کی تحویل درجہ دوم کی مساواتوں کی طرف ہوجائیگی اگر ع^{۲} ص - ۴ق ص + ر^{۲} = ۰
یا اگر ع^{۳} - ۴ع ق + ۸ر = ۰

(۱۰) ثابت کرو کہ مساوات لا^{۴} + $\frac{۳}{۲}$ ق لا^{۲} + رلا + ص = ۰ تمام حقیقی قیمتیں نہیں
ہو سکتیں اگر ق^{۳} + ر^{۲} مثبت ہو

(۱۱) اگر ح (لا) جملہ ناطقہ صحیحہ لا کا ہو تو کیا ح (لا) = ۰ یا ح' (لا) = ۰ کی یقینی ایک حقیقی قیمت ہے

(۱۲) ایک مساوات کعبی قیمتوں کا یہہ جملہ ا^{۲}ب + ب^{۲}س + س^{۲}ا نصف بالقرینہ ہے
تو بتاؤ اوسکی قیمت کیونکر دریافت کریں

(۱۳) فرض کرو کہ ا و ب و س و . . . . ک ن درجہ کی مساوات ح (لا) = ۰ کی
قیمتیں ہوں اور اپنی سادی صورتوں میں لکھی ہوں اور یہہ سب قیمتیں غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ جملہ

$$\frac{ا^{ر}}{ح'(ا)} + \frac{ب^{ر}}{ح'(ب)} + \frac{س^{ر}}{ح'(س)} + \cdots + \frac{ک^{ر}}{ح'(ک)}$$

برابر واحد کے ہی اگر ر = ن - ۱ اور برابر صفر کی ہی اگر ر برابر صفر کے ہے یا اوس
مثبت صحیح عدد کی ہی جو ن - ۱ سی کم ہی اور یہہ بھی ثابت کرو کہ اگر

ر = - ۱ تو جملہ = $\frac{(-۱)^{ن-۱}}{ا\,ب\,س \ldots ک}$

(۱۴) اگر ح (لا) = لاⁿ - ۱ اور ا و ب و س ... قیمت ح (لا) = ۰ کی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ن\ لا^{ن-۱}}{لا^{ن}-۱} = \frac{۱}{لا-ا} + \frac{۱}{لا-ب} + \frac{۱}{لا-س} + \cdots$$

(۱۵) ثابت کرو کہ صحیح حصہ $\frac{۱}{\sqrt{۳}}(\sqrt{۳}+\sqrt{۵})^{۲ن-۱}$ پورا ۲ⁿ پر تقسیم ہوتا ہے

جوابات

پہلا باب (۱) لا⁴ + ۱۱ لا³ + ۴۷ لا² + ۲۰۵ لا + ۳۰۸۳ اور باقی ۳۳۳۰۶

دوسرا باب (۱) $\left(\frac{۱+\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}} + \left(\frac{۱-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{-۱}$ (۲) $\frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{\sqrt{-۱}}{\sqrt{۲}}$

تیسرا باب (۷) -۱ و -۴۴ و ۱۲۱ (۸) س = ۵ و ص = ۲

(۹) -ع₁ + ۳ع₁ع₂ - ۳ع₃ (۱۰) لا⁴ - ۲ لا³ - ۲ لا + ۱ = ۰ دفعہ ۴۸ دیکھو

(۱۱) (ع₁² - ۲ع₂) $\frac{ع_{ن-۱}^۲ - ۲ع_ن\ ع_{ن-۲}}{ع_ن^۲}$ - ن (۱۳) دفعہ ۴۵ کے

مطابقہ میں متواتر $\sqrt{-۱}$ اور $-\sqrt{-۱}$ کو لا کے جگہ رکھو

چوتھا باب (۵) قیمتیں ۶ و ۶ و ۷ ± $\sqrt{-۱}$ (۷) ی⁴ - ۲ی² + $\frac{۲}{۳}$ = ۰

(۸) دفعہ ۲۲ و ۵۰ دیکھو (۱۵) ۱۴ مثال کو کام میں لاؤ

چھٹا باب (۱) (۱۵) -۷ قیمت (۱۶) $\frac{۱}{۲}$ قیمت ہے

(۱۷) قیمت ایک دفعہ آتی ہے (۱۸) قیمت -۱ تین دفعہ واقع ہوتی ہے

(۱۹) ۲ اور ۳ قیمتیں ہیں (۲۰) ۱ اور -۱ مکرر قیمتیں ہیں . . .

(۲۳) فرض کرو کہ جو قیمت مکرر آتی ہے وہ ا سی اور دوسری قیمت ب سی تعبیر ہو تو دائیں طرف کا رکن مساوات مفروضہ کا مطابق (لا - ا)³ (لا - ب) ہوگا اور

پھر مثال برابر لکھنی سے مطلب حاصل ہوگا

ساتواں باب (۷) قیمتیں ح (لا) = ۰ کی -۲ و -۱ و ا ہیں دفعہ ۱۰۲ کو کام میں لاؤ

اٹھواں باب ۱ (۴) $\frac{۳}{۲}$ (۶) $\frac{۲}{۳}$

نواں باب ۲ (۳) -۱ و ا و ۳ و ۵ (۴) -۴ و -۲ و -۴ و -۲ و ۰ و ۲ و ۶

(۳) (۱) ۳ و ۲/۳ (۲) ۱ ± √۵ (۳) ۲ ± √۳ (۴) ۱/۴ (۳ ± √۵)

(۵) −۲ و ۱ (۶) ۱ و ۲

(۴) (۱) ا = ۱ (۲) ا = ۳ و ب = ۲ (۳) ا = ۲ و ب = ۳

(۴) ا = ۱ و ب = −۳ (۵) ا = ۱ و ب = −۳ و س = −۲

(۶) ا = ۳ و ب = −۱ و س = ۵ (۶) قیمتیں ۶ اور ۲ ہیں

(۷) مشترک قیمتیں مساوات لا² + ۲لا − ۴ = ۰ سے معلوم ہوتی ہیں

(۸) قیمتوں کو ص/۳، ص و ص ... سے تعبیر کرو اور انکے حاصل ضرب کو ق کے برابر لکھو اور ہر زوج کی حاصل ضرب کو برابر (م² + م) لکھو تو یہہ ثابت ہوسکتا ہے کہ ع برابر ق کے ہے

بارہواں باب ۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۲ ۱/۳ − ۲ − ۱/۳

(۵) ۱/۲ (۲ ۱/۲ + ۲ + ۲ ۵/۶) (۶) قیمت ۱۱ دو دفعہ واقع ہوتی ہے

(۷) ۱۶ / (۲ ۱/۳ + ۲ ۵/۶) (۸) ۲ ا

تیرہواں باب ۱ (۱) ۳ و −۲ (۲) قیمت −۱ مکرر آتی ہے

(۳) قیمت کو بقدر ۳ کے ... تو مساوات درجہ چہارم کی حل ہوجائیگی

چودہواں باب ۱ (۱) ایک قیمت ۲ اور ۳ کے دوسرے ۳ اور ۴ کی درمیان اور دو ناممکن قیمتیں (۲) دو قیمتیں ۰ اور −۱ کی ہیں اور دو قیمتیں ۲ اور ۳ کے درمیان

انیسواں باب ۱ (۱) (ر − ق)² + ع (ر − ق) + ر (۲) ۲ع³ − ۹ع ق + ۲۷ر

(۳) −۲ع² + ع ق − ۳ر (۴) ۹ق − ۳ع² (۵) (ق² + رع) / (ر − ع ق)

(۶) ق³/ر² − ع(ق − ع²)/ر + ۳ (۷) ۱/۴ (۳ق − ع²)(۳ع ر − ق²) − ۱/۴ (ع ق + ۹ر)

(۲) ۲ق (۳) (۱) ۳ع ر − ع، ع ر (۲) اگر مساوات کو ح (لا) = ۰ سے تعبیر کریں تو جملہ مفروضہ ر فرح کی ... ح (۱−) / ۲ (۱−) ن ہوجائیگا اس سے معلوم ہوا کہ مجموعہ مطلوب

$\frac{1}{2}$ [صان-۱ − ع۱ صان-۲ + ع۲ صان-۳ − ۰۰۰ + (−۱)ن ع ن ص ن-۱]

(۳) ع۱ ع ن / ع ن + ن‌ع − ۲ن (۴) −ن − (ع۱² − ۲ع۲) ع ن-۱ / ع ن

(۶) فرض کرو کہ بدلی ہوئی مساوات

لا^م + ق۱ لا^(م-۱) + ق۲ لا^(م-۲) + ق۳ لا^(م-۳) + ۰ ۰ ۰ = ۰

تو م = ن(ن−۱)/۲ اب بدلی ہوئی مساوات کی قیمتوں کے قوا د کا مجموعہ دریافت کرتی ہیں اور پہر امثال موافق دفعہ ۲۴۴ کے نتیجہ حاصل ہوگا

ق۱ = (ن−۱) ع۱ و ق۲ = (ن−۱)(ن−۲)/۲ ع۱² + (ن−۲) ع۲

ق۳ = (ن−۱)(ن−۲)(ن−۳)/[۳ ع۱³ + (ن−۲)² ع۱ ع۲ + (ن−۴) ع۳

بائیسواں ۲۲ باب

د² − ۲د = ۱۰ اور (د−۱) لا + د = ۰ د² − ۱ = ۱۰ اور (د−۱) لا + ۲د = ۰ سے حل معلوم ہوسکے ہیں

تئیسواں ۲۳ باب

۱ د = لا + ۰۰ ذ د = ± ۳√۲لا + ۰۰ و د = ۳/۲لا۲ + ۰ ۰

(۲) چہ قیمتیں صورت د = لا^⅔ (لو + لی) کی ہیں جنمیں لو اس مساوات ۱ − لو² − لو⁴ + لو⁶ = ۰ سی دریافت ہوتا ہے قیمتیں

د = لا^⅓ (لو + لی) کی اسمیں ۱ − ۳لو² = ۰ سی لو دریافت ہوتا ہے

چار قیمتیں اس صورت د = لا^¼ (لو + لو) اسمیں ۳ − ی⁴ = ۰ سے لو دریافت

امثال متفرقہ

(۱) مجموعہ کو ح (لا) سے تعبیر کرو اور ثابت کرو کہ ح (لا) − ۱ متطابق صفر کے بموجب دفعہ ۳۹ کے ہے

(۲) د⁶ − ۱۲د⁵ + ۶۵د⁴ − ۲۰۰د³ + ۵۴۰د² − ۱۴۲۸ = ۰

(۱۵) مساوات درجہ دوم کی بناؤ جسکی قیمتیں ۳√ + ۵√ اور ۳√ − ۵√ ہو اور دفعہ ۲۶۱ کو کام میں لاؤ الجبرا کی دفعہ ۵۲۷ دیکھو فقط تمام شد

Date	No.	Date	No.